格子理論におけるフェルミ粒子の表し方

東京工業大学大学院 理工学研究科
修士課程 基礎物理学専攻
山本明

2002 年 1 月
(2002 年 12 月修正)

2002 年 12 月 6 日 23 時 20 分
作成データ

Abstract

The idea of lattice is very powerfull to study the field theory in strong coupling region. But there exists a problem in expressing a chiral fermion, as we known as doubling problem or species doubler.

This problem is that there are other particles in lattice theory which never exist in continuous theory. So if you make a lattice theory from some continuous theory by discretization and then take a continuum limit, you'll find fermi-particles doubled. This means we cannot make a lattice version from continuous standard model (SU(3)×SU(2)× U(1)) which treats right-handed and left-handed electrons separately. In the view point of calculation in strong coupling region, lattice theory goes very well, but is no-go for the purpose of expressing fermions. And, this problem has been proved to be unable to be escaped from. (which we called as Nielsen-Ninomiya theorem or No-go theorem)

In this thesis the famous three methods are presented for expressing fermions and overcoming that problem.

The first method in the three is called Wilson fermion, which was proposed by Wilson who was the first propser of lattice field theory. In this method, doubling species are never seen because a certain term like a mass term is introduced, which gives a mass to doublers and is proportionate to lattice size. So this additive term is disappeared in a continuous limit. But as this term is like a mass term, so not only doublers but chiral symmetry has also gone.

The second method is called staggerd fermion or Kogut-Susskind fermion, suggested by Kogut and Susskind, or others. This method is based on an idea of distributing degrees of freedom. In a normal idea of lattice fermion, a spinor field is treated on a site. In this idea of staggerd fermions, the field on a site is not a whole spinor but one component of spinor fields. This makes the effective lattice spacing doubled, and species doublers have never seen. On the other hand, to complete the idea of distribution, we need another parameter which expresses "flavour". So in the idea of staggerd fermions, there are no doubler but are some differently flavoured fermions.

The last method is a relatively new approach to express chiral fermions. Some call this method Lüscher fermion. This fermion also gives up chiral symmetry, but gets a modified chiral symmetry, which is known as Lüscher symmetry or Ginsparg-Wilson relation. Using this modified chiral symmetry, we can calculate an anomaly correctly and easily. So some think this modified chiral symmetry is "exact" chiral symmetry on the lattice.

The purpose of this thesis is to get a better sight on the lattice field theory through the study of doubling problem. To achieve this purpose better, the author pays attention to the problem which rises up if we make a supersymmetric theory on the lattice. A lot of attempt to get supersymmetric theory on the lattice have been made. In this thesis, only two methods are presented. One is based on the idea of staggerd fermion. The other is a challenge to make a supersymmetric version of Ginsparg-Wilson relations.

目 次

1 導入 **1**
1.1 格子理論とは 1
1.2 歴史といくつかの主要論文について 3

2 ダブラーの問題 **6**
2.1 格子上のフェルミオン 6
2.2 スカラー場の場合 8
2.3 Dirac 演算子のエルミート性 10
2.4 やや直感的な議論 10

3 Nielsen-Ninomiya の定理 (No-go 定理) **12**
3.1 証明の概要 12
3.2 定理の証明 16
3.3 理論に含まれるフェルミオンの最低数 25

4 ダブラー問題に対する Wilson のやり方 **30**
4.1 Wilson fermion 30
4.2 Wilson のやり方におけるダブラーについて 31
4.3 超対称性への拡張に関するコメント 32

5 Staggerd Fermions **33**
5.1 概要 33
5.2 2 次元の staggerd fermion とカイラル対称性 34
5.3 d 次元での staggerd fermion 37
5.4 Staggerd fermion におけるダブラー回避の考え方について 38
5.5 超対称性への拡張例: Itoh らの試みについて 43

6 Lüscher Fermions **49**
6.1 Lüscher 対称性 49
6.2 Ginsparg-Wilson 関係式 51
6.3 Lüscher fermion の有効性 54
6.4 超対称性への拡張例: 超対称性での Ginsparg-Wilson 関係式 59

7 総論 **64**

A 補足 : 発表会用に用意した投射原稿と発表内容 **67**
A.1 発表内容 67
A.2 質疑応答 80
A.3 使わなかったシート 81

参考文献 **86**

1　導入

1.1　格子理論とは

現在の物理学では、クォークやレプトンなどの素粒子は少なくとも低エネルギーにおいて場の量子論に従って運動していると信じられている。そして場の量子論では経路積分を用いた量子化を考えることが多い。その経路積分は場の関数を微分したり全空間で積分したりという操作が含まれている。

微分や積分は「座標を離散的にとらえて、それの連続極限とったもの」だと考えることは自然なことである。例えば関数 $f(x)$ を x で微分するときには

$$\frac{df}{dx} = \lim_{a\to 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a}$$

と考える。また積分ならば区分求積法で

$$\int f(x)dx = \lim_{a\to 0} \sum_n a f_n$$
$$\big(f_n = f(x = an)\big)$$

と考える。つまり関数の微分や積分を行うときには、特に意識していなくても離散化された空間が存在していて無意識のうちにそれを連続極限 (上の例では a を 0 にする極限) をとるという操作をしているのである。

このように空間を離散化して連続極限をとるという操作が問題を引き起こすことはないと普通は考えている。しかし理論を一旦離散化するという操作がなにか悪いことをしていないか疑ってみることも必要なことだろう。

格子理論というのは、そのように空間を離散化した状態——つまり上の例でいうと $a \to 0$ の極限を取る前の段階——での理論を考えることである。微分には差分、積分には和を対応させて理論を書き表し、最後にそれの連続極限をとる。

連続極限をとったときに普段考えている理論と同じ形になるように、格子理論は構成されている。場の強度 (field strength) の格子理論における対応物など、いくつか工夫を加えて、スカラー場の格子理論を作ってみると、連続理論と比較して特に問題が発生することはない。それどころか強結合展開などの手法を使って、相互作用が強いときの理論計算が可能になるという利点もある。

また場の量子論には計算した物理量が発散するという固有の問題がある。これは空間の 2 点が限りなく近くに近づけることに起因するものであり、格子理論ではこの種類の発散を心配する必要はない。つまり格子理論には紫外発散に対する正則化の手段としての魅力もある。

さてスカラー場では特に問題なく格子上の理論展開ができ、強結合の解析ができ、紫外発散も現れないといいことずくめのように見える格子理論だが、視点をフェルミ場に向けると状況は変わってくる。フェルミオンを格子で表そうとすると、元々の連続理論にはなかったはずの粒子まで理論の中に現れてしまうのである。4 次元の時はその数 16 個にも及び、無視できない状況になる。これが「フェルミオンのダブラー問題」と呼ばれるもので、この論文の主題でもある。

格子理論は、微分に差分を対応させて連続極限をとる前の段階を調べることだと指摘したが、微分を差分に置き換えるには何通りか考えられる。例えば上で書いたように、

$$\frac{df}{dx} = \lim_{a\to 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a}$$

と考え、$\frac{f(x+a)-f(x)}{a}$ を微分の対応物と考えることは自然である。しかし微分を

$$\frac{df}{dx} = \lim_{a\to 0} \frac{f(x) - f(x-a)}{a}$$

と見なすことも可能であり、微分の対応物として $\frac{f(x)-f(x-a)}{a}$ を主張しても不思議はない。さらには、

$$\frac{df}{dx} = \lim_{a\to 0} \frac{f(x+a) - f(x-a)}{2a}$$

という考え方もあろう。これらは連続理論ではどれも同じものだが、格子理論では違ったものである。そしてこういった違いがダブラーと呼ばれる余分な粒子の存在に深く関わっている。

このダブラーというものは、いくつかの仮定の下でフェルミオンを格子に乗せようとすると、必ず発生してしまうものだということがすでにわかっている。

ダブラーと呼ばれる余分な粒子の存在を受け入れて理論を構成し直すということもひとつの選択肢ではあるだろう。しかし少なくとも、標準模型を信じ、それを格子上の理論に書き直して連続極限をとるという操作をしようと思えば、このダブラーは何とかして回避しなくてはならない。なぜならば、標準模型には特定のカイラリティのみを持つフェルミ場が登場し、主要な役割を果たしているからである。例えば標準模型には右巻きのニュートリノは含まれていない。しかしダブラーを受け入れると、左巻きニュートリノに対応する右巻きニュートリノの存在を受け入れなければならなくなる。

フェルミオン、特にカイラルフェルミオンを格子上で自然に書き表そうとする試みはいくつもなされてきた。この論文では、そのなかでも特に重要であると思う 3 つの方法をレビューする。一つ目は Wilson fermion と呼ばれる方法で、これは格子理論を素粒子に持ち込んだ Wilson が提案したやり方である。計算が容易で、計算機を用いた数値解析ではいまだに一番使われ続けている手法である。

二つ目は Kogut-Susskind fermion もしくは staggerd fermion と呼ばれる方法で、これはスピノール場の成分を都合がいいように格子空間に配置させてしまう。連続極限をとるとフェルミオンの理論が再現でき、余分な粒子が現れるということはないが、何種類かのフェルミオンを同時に記述する必要がある。そのことを欠点とみるか利点とみるかは人それぞれだろう。

そして三つ目は Lüscher fermion と呼ばれる方法で、近年特に注目を浴びているものである。連続理論のカイラル対称性と相性が良く、標準模型を格子上の理論で表すための有力な手法だと考えられている。

格子理論のように考えなくとも (例えば繰り込みを用いた摂動論などでも) 場の理論は十分魅力的である。そして場の量子論にはもはや問題はないと信じて先に進むことも選択肢のひとつであろう。しかし場の量子論では、だいたいの場合において一旦格子化し

て連続極限をとるという操作を (頭の中では) 行っているはずである。その操作に問題はないか、その操作によって発生する困難はどのように回避できるのかについて、ゆっくり考えてみることも有意義であろう。

空間を離散化し、連続極限をとる前の段階で理論を構成すると、連続極限の理論にはなかった補正項が現れる。連続極限をとれば消えてしまうような項だが、それらにもひょっとしたら、もっと深い意味があるのかもしれない。そのような疑いを持つことから空間の構造について新しい知見が得られる可能性もないとは言い切れないだろう。

1.2 歴史といくつかの主要論文について

格子理論は 1974 年、Wilson によって導入された手法である (文献 [1])。これは格子理論によってクォークの閉じこめを記述しようとした試みである。この論文が初めて格子の考え方を素粒子理論に持ち込んだものである。ゲージ不変性を保った正則化として導入されているが、フェルミオンについての深い考察はなされていない。

Wilson 自身、フェルミオンを単純に格子に乗せたときに余分な粒子が現れてしまうということは早くに気付いていたようで、文献 [1] では触れられていないものの、文献 [2][3] といった書籍では、当論文 4 節 30 ページ以降で紹介するような手法を提案している。この論文ではこの手法を Wilson fermion と呼んでいる。

格子理論は離散的な数を扱っているために、計算機で解析しやすいという利点もある。Wilson の考え方を初めて計算機に乗せ、モンテカルロシミュレーションを行ったのは Creutz で 1980 年のことだった (文献 [4])。ただしこれはフェルミオンについては考えない pure gauge での解析である。フェルミオンも考えに入れた数値計算は文献 [5] 以降になる。

Wilson fermion 以外のダブラー回避法として早くに登場したのは、現在 Kogut-Susskind fermion もしくは staggerd fermion と呼ばれる方法である。これは Hamilton 形式の格子理論 (文献 [6]) に基礎をおき、1977 年に文献 [7] で提案された。当論文では 5 節 33 ページから扱う。Susskind は Hamilton 形式で議論したがそれは Lagrange 形式でも同じように扱うことができ、その連続極限が Dirac-Kähler fermion と同等であることを示した論文が文献 [8] や文献 [9] である。Dirac-Kähler fermion というのは連続理論のフェルミオンであり、微分形式を用いたフェルミオンの表式である (参考として文献 [10] を挙げておく)。

文献 [7] では新たに導入されたフェルミオンの種類を具体的なフェルミオンのフレーバーであると解釈している。しかしそれでは 4 次元において 4 種類のフレーバーが必要になってしまう。staggerd fermion (および Dirac-Kähler fermion) に現れる余分なスピノールの足をどう解釈するかにはまだ議論の余地がある。

近年、この足を超対称性の R 対称性の足であると見なしてはどうかという提案もなされている (文献 [11])。この理論ではゲージ固定に伴ってフェルミオンが生成される機構になっていて面白い。(ただし文献 [11] は Dirac-Kähler fermion についての議論であり、staggerd fermion についてではない)

さて Wilson や Susskind らのやり方では、カイラル対称性を犠牲もしくはカイラル対称性を拡張する方法で、ダブラーを現れなくしている。ダブラーの回避とカイラル対称性を両立する理論にはなっていない。そしてダブラー回避とカイラル対称性は同時には

決して実現できないのだということが 1981 年、Nielsen や Ninomiya らによって証明された。Nielsen-Ninomiya 定理もしくは no-go 定理として知られている (文献 [12][13][14])。この定理は 3 節で扱う。

Nielsen-Ninomiya 定理は次の 3 つの条件を満たす理論を考える場合、ダブラーの存在は避けられないという定理である。その条件というのは (1) 相互作用が局所的 (2) 格子が並進変換の下で不変 (3) ハミルトニアンがエルミートという 3 条件である。これらの条件を満たした格子理論を構成すると、カイラリティは最低でも 2 つ現れる、つまりカイラルフェルミオンは格子理論で定式化できないという主張である。

Wilson や Susskind らのやり方は上記 3 条件を大事にし、カイラル対称性を犠牲にしている。それに対して「相互作用の局所性」を犠牲にするという考え方もある。当論文では特に扱っていないが文献 [15] に代表されるやり方である。

Nilsen と Ninomiya らは (上記の) もっともらしい前提を課した上で格子理論を構成する場合について議論した。それに対して Ginsparg と Wilson らは先に連続理論でカイラル対称性を持つ理論を考え、それとブロックスピン変換で移り変われる格子理論に対する条件を求めようとした。1982 年の文献 [16] である。これは現在、Ginsparg-Wilson 関係式と呼ばれている。

この Ginsparg-Wilson 関係式を満たす Dirac 演算子はなかなか見つからなかったが、関係式のなかでも一番単純な形を満たす解が 1998 年に発見された。その解は Neuberger によって提案された Dirac 演算子であって (文献 [17][18])、さらに元々は 1992 年の Kaplan の指摘 (文献 [19]) に始まる流れである。この Kaplan らの流れは、4 次元とは別にさらに 1 つの空間的な余次元を導入し、余次元方向にステップ関数の形をした質量項を導入して右巻きと左巻きのフェルミオンを分けて存在させるという考え方である。そういった余次元を用いた考え方とブロックスピン変換に基づく考え方が関係づけられているというのは興味深いことといえる。

そしてそれを受けて Lüscher は文献 [20] で、一番単純な Ginsparg-Wilson 関係式を満たす Dirac 演算子の特徴を指摘し、その関係式が格子上におけるカイラル対称性 (に対応するもの) であることを主張した。続く論文、文献 [21][22] ではその対称性を利用して、U(1) 理論を格子上で書き表すことを試み、それは成功を収めた。同様の手法で標準模型を格子上で書き表そうという試みも続けられていて、文献 [23][24][25] などがある。ただし積分測度がゲージ場に依存するという困難のため、完成されてはいない。

Lüscher から始まる手法を当論文では Lüscher fermion と呼び、6 節 49 ページ以降で触れる。

格子を用いた超対称性についてもいくつかコメントをしておく。

超対称性を格子で書き表そうとする試みは文献 [26] に始まる。ただしこれは微分を単純に差分に置き換えることしかしていない。格子を用いた超対称性の研究はまだ本筋といえる流れはできておらず、初期の研究では他に文献 [27][28][29][30][31] などがある。まとめたものとして文献 [32] も挙げておく。

Lüscher や Neuberger らの発見を受けて、超対称性に応用して有用な解を得ようという試みもあり、文献 [33][34][35] などがある。超対称性に対する Ginsparg-Wilson 方程式は文献 [36][37] で挑戦されている。

最近 (2002 年) では格子の考えを用いた超対称性の構成として、staggerd fermion と似たように場の自由度を格子点に分配して対称性を表現しようとする流れも注目を集めている。ひとつは文献 [38] に始まる流れで、その続きの研究が文献 [39][40][41] となされている。もう一つの流れとして文献 [42] に始まるものもあり、続いて文献 [43] もあり、これらの今後の発展には注目したい。

最近の流れを含まない格子理論については教科書もあり、数値計算についても触れられているものとして、文献 [44] を挙げておく。他には文献 [45] といったレビューも参考になるだろう。最近の成果について触れている教科書はなく、原論文にあたるしかない。この論文がその一助になれば幸いである。

2　ダブラーの問題

格子上でフェルミオンを考える際に「ダブラー問題 (doubler problem)」と呼ばれる問題は避けて通れない。これは単純にフェルミオンを格子上に乗せると、連続の理論では現われないはずの余分な粒子 (doubler) が出てきてしまうという問題である。

まずは単純にフェルミオンを格子上に乗せてみて、どのような問題が出るのかを確認してみよう。その後、スカラー場の場合などと比較し、微分から差分への置き換え方について考えてみる。

2.1　格子上のフェルミオン

連続の理論でのフェルミオンの作用は

$$S_F = \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi(x) \tag{1}$$

である。

これを単純に格子上に乗せてみると、偏微分を差分演算子に置き換えて、

$$S_F = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial^*_\mu - M)\psi(x) \quad , \tag{2}$$

$$\partial^*_\mu = \frac{1}{2}(\triangle_\mu + \triangle^*_\mu) \tag{3}$$

となるだろう。ここで a は格子サイズ、$\triangle_\mu$ は前方の差分演算子、$\triangle^*_\mu$ は後方の差分演算子である[1]とし、以下、特に断らない限りこれと同じ記号を用いることにする。なお (3) 式の妥当性については 2.3 節で議論することにし、ここでは計算を続けることにする。

伝播関数を計算すると、その被積分関数の特異点から粒子の存在が判断できる。そこでここからはフェルミオンの伝播関数:

$$\langle \psi(x)\bar{\psi}(y) \rangle$$

がどのように計算できるかを確認していく。

格子理論で考える前に、同じ計算が連続の理論でどうだったかを先にみておくと、

$$\langle \psi(x)\bar{\psi}(y) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \exp[i\int d^4x' \bar{\psi}(x')(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi(x')]\psi(x)\bar{\psi}(y)}{\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \exp[i\int d^4x' \bar{\psi}(x')(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi(x')]} \tag{4}$$

であり (この式では metric=$(+---)$)、ここから Wick 回転 $(x_0 \to x_0^E, ix_i \to x_i^E)$ をすると

$$\langle \psi(x)\bar{\psi}(y) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \exp[-\int d^4x \bar{\psi}(x)(\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi(x)]\psi(x)\bar{\psi}(y)}{\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \exp[-\int d^4x \bar{\psi}(x)(\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi(x)]} \tag{5}$$

[1] μ 方向の単位ベクトルを $\hat{\mu}$ と表記すると、

$$\triangle_\mu F(x) = \frac{1}{a}\{F(x + a\hat{\mu}) - F(x)\}$$

$$\triangle^*_\mu F(x) = \frac{1}{a}\{F(x) - F(x - a\hat{\mu})\}$$

である。

この式は作用を

$$S_F = \int d^4x d^4y \bar{\psi}(y) K(x,y) \psi(x) \tag{6}$$

とする $K(x,y)$ を導入して、

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = K^{-1}(x,y) \tag{7}$$

となる。

$K(x,y)$ をちゃんと書くと、

$$\begin{aligned} K(x,y) &= (\gamma^\mu \partial_\mu - M)\delta(x-y) \\ &= (\gamma^\mu \partial_\mu - M) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (i\gamma^\mu p_\mu - M) e^{ip(x-y)} \end{aligned} \tag{8}$$

結果として

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i\gamma^\mu p_\mu - M}{p^2 + M^2} e^{ip(x-y)} \tag{9}$$

を得る。(4) 式から (9) 式までは連続理論の場合である。

格子上の理論でも (2) 式を用いて同様に計算すると、連続の場合と同様に、

$$S_F = a^4 \sum_{x,y} \bar{\psi}(y) K(x,y) \psi(x) \tag{10}$$

とする $K(x,y)$ を用いて

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = K^{-1}(x,y) \tag{11}$$

となる。

ここで $K(x,y)$ を計算するのだが、(2) 式と (3) 式 :

$$S_F = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x)(\gamma^\mu \partial^*_\mu - M)\psi(x) \quad , \tag{2}$$

$$\partial^*_\mu = \frac{1}{2}(\triangle_\mu + \triangle^*_\mu) \tag{3}$$

から、

$$K(x,y) = \frac{1}{2}\gamma^\mu (\delta_{y\,x-a\hat{\mu}} - \delta_{y\,x+a\hat{\mu}}) - M\delta_{y\,x} \tag{12}$$

である。ここで $\delta_{y\,x}$ はデルタ関数、a は格子サイズ、$\hat{\mu}$ は μ 方向の単位ベクトルとしている。

デルタ関数のフーリエ変換は

$$\delta_{x\,y} = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \tag{13}$$

となる。この式の積分範囲が $-\pi/a \sim \pi/a$ であることは、空間を格子に区切った場合の運動量空間がどのようになるかを考えれば理解できる。それを確認してみると次のようになる。なお格子の並進不変性は前提とする。

格子上で定義された関数として $F(x)$ と表記すると、そのフーリエ変換を $\tilde{F}(p)$ として

$$\tilde{F}(p) = \sum_x F(x) e^{ipx}$$

となる。ここの $\sum$ は各サイトの足し算である。つまり格子サイズを a として $x = 0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, ...$ というように足している。ここで格子の並進不変性 (or 等方性) に注意すると、

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(p + \hat{\mu}\pi/a) &= \sum_x F(x) e^{i(p+\frac{\pi}{a}\hat{\mu})x} \\
&= \sum_{\vec{n}} F(x) e^{i(p+\frac{\pi}{a}\hat{\mu})\vec{n}a} \qquad\qquad \vec{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4) : \text{integer} \\
&= \sum_{\vec{n}} F(x) e^{i(p\vec{n}a + n_\mu \pi)} \\
&= \sum_{\vec{n}} F(x) e^{i(p\vec{n}a - n_\mu \pi)} \\
&= \sum_x F(x) e^{i(p-\frac{\pi}{a}\hat{\mu})x} \qquad = \tilde{F}(p - \hat{\mu}\pi/a)
\end{aligned}$$

となり、格子上で定義された関数のフーリエ成分は周期 $2\pi/a$ を持っている。そこでその運動量空間の範囲として、

$$-\frac{\pi}{a} \leq p_\mu \leq \frac{\pi}{a} \tag{14}$$

を選ぶことは不自然なことではないであろう。(なおこのことからわかる通り、格子理論における運動量空間は $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ という 4 次元トーラスになっている)

それでは行っていた計算を完成させよう。 (13) 式を用いて $K(x, y)$ に代入し、伝播関数を求めると、

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma^\mu \tilde{p}_\mu - M}{\tilde{p}^2 + M^2} e^{ip(x-y)} \quad , \tag{15}$$

$$\tilde{p}_\mu = \frac{1}{a} \sin a p_\mu \tag{16}$$

の結果を得る。

この (16) 式が余分な粒子 (doubler) の存在を示している。伝播関数の極の位置が粒子であると考えられるので、(16) 式の分母に注目する。簡単のために質量 0 の粒子を格子に乗せることにして $\tilde{p} = 0$ となる点を探すことにすると、$p = 0$ の他に $p = \pm\pi/a$ という点も (余分な) 粒子を表しているのがわかるだろう。これがダブラーである。

次の図 1 は (16) 式を図示したものである。

2.2 スカラー場の場合

スカラー場でも (15) 式と同じ状況になるのではないかと思うかもしれない。しかしスカラー場の場合はうまくダブラーを回避することができる。

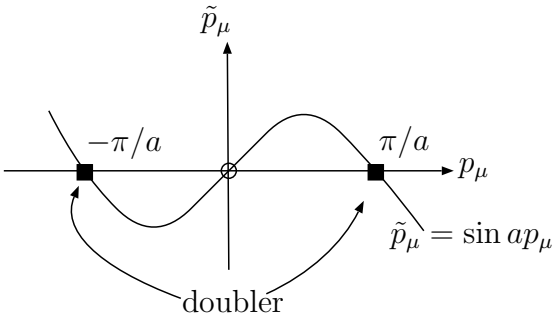


図 1: 余分な粒子の存在

スカラー場の連続理論での作用は、

$$S_B = \frac{1}{2}\int d^4x\phi(x)(-\partial^\mu\partial_\mu + M^2)\phi(x) \tag{17}$$

であり、そこから伝播関数を計算すると、

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2+M^2}e^{ip(x-y)} \tag{18}$$

となる。

格子上の理論に置き換える際は

$$S_B = \frac{1}{2}a^4\sum_x \phi(x)(-\triangle_\mu^*\triangle_\mu + M^2)\phi(x) \tag{19}$$

とすればよい。ここで $\triangle_\mu^*, \triangle_\mu$ の定義は先と同じである (6 ページ参照)。

ここからでる伝播関数は

$$S_B = \frac{1}{2}a^4\sum_{x,y}\phi(y)K(y,x)\phi(x) \tag{20}$$

$$K(y,x) = -\delta_{y\,x-\hat{\mu}} + 2\delta_{y\,x} - \delta_{y\,x+\hat{\mu}} + \delta_{yx}M^2 \tag{21}$$

から計算して、

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle = \int_{-\pi/a}^{\pi/a}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{\tilde{\tilde{p}}^2+M^2}e^{ip(x-y)} \tag{22}$$

$$\tilde{\tilde{p}}_\mu = \frac{2}{a}\sin\frac{a}{2}p_\mu \tag{23}$$

となり、特に余分な粒子、ダブラー (doubler) は現われない。

図 1 と同じような図を描いてみると、図 2 のようになる。

スカラー場に対してダブラーが現われないのは、微分 $\partial^\mu\partial_\mu$ を差分 $\triangle_\mu^*\triangle_\mu$ に置き換えていることにトリックがある。仮にフェルミオンの作用を格子化したときの置き換え方:(3) 式にならって、

$$\partial^\mu\partial_\mu \longrightarrow \quad \frac{1}{4}(\triangle_\mu + \triangle_\mu^*)(\triangle_\mu + \triangle_\mu^*) \tag{24}$$

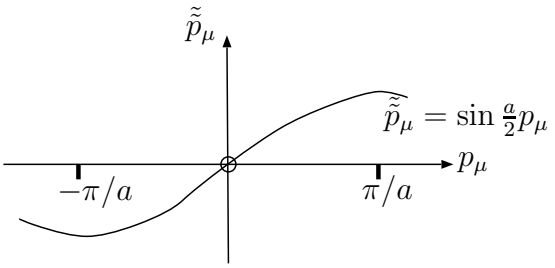


図 2: スカラー場の場合

としたならば、伝播関数に現われる $\tilde{\tilde{p}}_\mu$ は

$$\tilde{\tilde{p}}_\mu = \frac{1}{a}\sin ap_\mu \tag{25}$$

となり、ダブラーが発生する。スカラーの場合でもダブラーは現われうるのである。このことが特に重要になるのは超対称性の場合で、このときはスカラー場の運動項を (24) 式のように選ばなければいけなく、結果としてフェルミオンだけでなくスカラー場にもダブラーが現われることになる。

しかし何も積極的に都合の悪い置き換えを選ぶ理由はない。超対称性を考えない場合は大抵、$\partial^\mu\partial_\mu \to \triangle^{*\mu}\triangle_\mu$ の置き換えを行って済ましている。

2.3 Dirac 演算子のエルミート性

ではフェルミオンでも微分から差分への置き換え方 (3): $\partial^*_\mu = \frac{1}{2}(\triangle_\mu + \triangle^*_\mu)$ に問題があったのではないか、と考えるのも自然なことだろう。

仮に

$$\partial_\mu \longrightarrow \quad \partial^*_\mu = \triangle_\mu \tag{26}$$

という置き換えをしたら、いいのではないか?

実はこの項だけを考えると、確かにダブラーは出てこない。しかし、フェルミオンの作用にはこの項にエルミート共役なものも加えられなければならない。(26) 式の項のエルミート共役を考えると

$$\begin{aligned}\left[\sum \bar{\psi}\gamma^\mu\triangle_\mu\psi\right]_{\text{H.C.}} &= \sum(-(\triangle_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi) \\ &= \sum \bar{\psi}\gamma^\mu\triangle^*_\mu\psi\end{aligned} \tag{27}$$

結局は元の (26) 式に戻ってしまうのである。つまり作用にエルミート性を要求する限り、フェルミオンのダブラーは回避できない問題なのである。

2.4 やや直感的な議論

スカラー場とフェルミオンでは何が違ってダブラー発生の有無が異なっているのか。それぞれの作用の運動項の違いを比べてみよう。まずフェルミオンの運動項はおよそ

$(\triangle_\mu^* + \triangle_\mu)$ という形をしている。これを具体的に関数 $f(x)$ に作用させてみると、

$$(\triangle_\mu^* + \triangle_\mu)f(x) = f(x + a\hat{\mu}) - f(x - a\hat{\mu}) \tag{28}$$

これに対してスカラー場の運動項は $\triangle_\mu^* \triangle_\mu$ という形であり、

$$\begin{aligned}(\triangle_\mu^* \triangle_\mu)f(x) &= f(x + a\hat{\mu}) - 2f(x) + f(x - a\hat{\mu}) \\ &= \big\{f(x + a\hat{\mu}) - f(x)\big\} + \big\{f(x - a\hat{\mu}) - f(x)\big\}\end{aligned} \tag{29}$$

となっている。これをみてわかることは、スカラー場では隣り合う格子間で差をとっているのに対して、フェルミオンではその 2 倍の間隔の格子点での差をとっているということである。このことがダブラー発生有無に関わっている。

$f(x)$ をフーリエ変換して運動量空間での関数に書き換えてみよう。すると、

$$\begin{aligned}f(x + a\hat{\mu}) - f(x - a\hat{\mu}) &= \int dp \left[\hat{f}(p)(e^{-ip(x+a\hat{\mu})} - e^{-ip(x-a\hat{\mu})})\right] \\ &= \int dp \left[\hat{f}(p)e^{-ipx}(e^{-iap_\mu} - e^{iap_\mu})\right] \\ &= \int dp \left[\hat{f}(p)e^{-ipx}(-2i \sin ap_\mu)\right] \\ &\propto \quad \sin ap_\mu\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}f(x + a\hat{\mu}) - f(x) &= \int dp \left[\hat{f}(p)(e^{-ip(x+a\hat{\mu})} - e^{-ipx})\right] \\ &= \int dp \left[\hat{f}(p)e^{-ipx}e^{-iap_\mu/2}(e^{-iap_\mu/2} - e^{iap_\mu/2})\right] \\ &= \int dp \left[\hat{f}(p)e^{-ipx}e^{-iap_\mu/2}(-2i \sin ap_\mu/2)\right] \\ &\propto \quad \sin ap_\mu/2\end{aligned} \tag{31}$$

となっている。

スカラー場の運動項は (29) 式より 2 つの隣接格子間で差をとっているが、それらはどちらも (31) 式のように $\sin ap_\mu/2$ に比例する。つまりフェルミオンの運動項に相当する (28) 式は (30) 式より $\sin ap_\mu$ に比例し、スカラー場の運動項に相当する (29) 式は $\sin ap_\mu/2$ に比例することがわかる。

関数が $\sin ap_\mu$ に比例していれば $-\pi/a \sim +\pi/a$ の範囲で 2ヵ所の零点を持ち、$\sin ap_\mu/2$ ならば零点が 1 つになるのは明らかなことである。つまりフェルミオンでは隣接格子点でなく、2 つ飛びの格子点と差を取るように運動項が作られていることがダブラーを生じさせている。しかし隣接格子点で差を取ろうとすると、前小節で見た通り作用のエルミート性の要求を満たすことができないのである。

3 Nielsen-Ninomiyaの定理 (No-go定理)

前節で見たとおり格子理論でフェルミオンを表現するにはダブラーと呼ばれる困難がつきまとう。このことは格子理論が考えられるようになってからすぐに知られていた。格子理論を提案したWilsonは単純なやり方でフェルミオンを格子に乗せることには問題があることを指摘し、4節でみるような独自のやり方を提案していた。また他にも文献[15]や文献[7]といった論文など、この困難を解決しようという試みはいろいろとなされている。とはいえ、カイラルフェルミオンを格子理論で表すことは、必ずしも成功してはいなかった。

そしてこの困難はある意味克服できないものだということが、1981年Nielsenや Ninomiyaによって証明されたのである (文献[12][13][14]の論文)。これはNielsen-Ninomiya定理もしくはno-go定理として知られている。

この定理は、ハミルトニアンに3つの “もっともらしい” 仮定を課した上で、その仮定が成立するかぎり、格子上で右巻きと左巻きを別々に扱うWeyl fermion を表現することはできないことを示したものである。

Weyl fermionは標準模型に現われる。標準模型$\mathrm{SU}(3)\times\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$では右巻きの電子と左巻きの電子を別々に扱っているが、Nielsen-Ninomiya定理はこれが達成できないことを意味している。

Nielsen-Ninomiya定理をもう少し詳しく表現すると、「ハミルトニアンが次の仮定 (先に “もっともらしい” 仮定と書いたもの) を満たす場合、右巻き粒子と左巻き粒子は必ず組になって現われる」というものである。

そしてその “もっともらしい” 仮定というのは以下の3つである。

(i) 相互作用の局所性 (locality)

(ii) 格子の並進不変性

(iii) ハミルトニアンのエルミート性

(i)はハミルトニアン$H(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$が$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\to\text{large}$に対して十分早く0に近づき、$H(\boldsymbol{x})$のフーリエ変換が1階微分で連続であるということを要請している。

3.1 証明の概要

前提

証明はKogut-Susskind格子で行う[2]。なお、ここでの証明は文献[12]による方法で、ホモトピー論を利用したものである。

[2]Kogut-Susskind格子とは、空間を格子状、時間は連続に保つ考え方である (文献[6])。この3節で行う証明を時間も離散的に捉えるWilson格子に拡張することは難しくない。時間を離散的に捉えたとしても、単位時間あたりの推進演算子e^{-H}からハミルトニアンに対応するHを見つければよい。

考える理論は作用が

$$S = -i \int dt \sum_{\boldsymbol{x}} \dot{\bar{\psi}}(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}) - \int dt \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \bar{\psi}(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{y}) \tag{32}$$

となっているものである。一般的なものとして考えるために、$\psi(\boldsymbol{x})$ は複素 N 成分の場であるとする。

H に対する条件は先に述べた通り、

(i) 相互作用の局所性 (locality)

(ii) 格子の並進不変性

(iii) ハミルトニアンのエルミート性

である。

証明の方針としては、固有値方程式

$$H(\boldsymbol{p})|\omega_i(\boldsymbol{p})\rangle = \omega_i(\boldsymbol{p})|\omega_i(\boldsymbol{p})\rangle\,, \quad (i = 1, ..., N) \tag{33}$$

に注目して、粒子の数を勘定する。

この方程式には次の条件を課す:

(i) $\omega_i(\boldsymbol{p})$ が縮退していない $\boldsymbol{p}$ の値に対しては次の不等式が成立すること。

$$\omega_1(\boldsymbol{p}) > \omega_2(\boldsymbol{p}) > \cdots > \omega_N(\boldsymbol{p})$$

(ii) 離散的ないくつかの値 $\boldsymbol{p}$ で 2 つのエネルギーレベルは縮退している。その $\boldsymbol{p}$ の値を今後 $\boldsymbol{p}_{deg}$ と呼ぶ:

$$\omega_i(\boldsymbol{p}_{deg}) = \omega_{i+1}(\boldsymbol{p}_{deg})$$

(iii) $\omega_i(\boldsymbol{p}) = 0$ は縮退点 $\boldsymbol{p}_{deg}$ で達成される

(ii) では 2 つのエネルギーレベルが縮退するとしているが、3 つやそれ以上のエネルギーレベルが縮退することは一般的にはありえない。

もし 3 つのエネルギーレベルが縮退していたとすると、ハミルトニアンの 3×3 行列の部分は、

$$H^{(3)}(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{8} c_i^{(3)}(\boldsymbol{p})\lambda_i + d^{(3)}(\boldsymbol{p})1$$

と表される (λ_i は Gell-Mann の SU(3) 行列) が、$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{deg}$ で縮退するために $c_i^{(3)}(\boldsymbol{p}_{deg}) = 0$ とならなければならない。しかしこれは、3 つの変数を定めるために 8 つの条件式が現われているわけで、これは条件が多すぎなのである。

それに対して 2 つのエネルギーレベルが縮退しているとすると、ハミルトニアンの 2×2 行列の部分は、

$$H^{(2)}(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{3} c_i^{(2)}(\boldsymbol{p})\sigma^i + d^{(2)}(\boldsymbol{p})1$$

となり、$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{deg}$ で縮退するための条件式 $c_i^{(2)}(\boldsymbol{p}_{deg}) = 0$ はちょうど 3 つになっている。

(i)(ii) の条件は Weyl fermion を記述しようとする理論ならば、Weyl equation と同じ縮退をもつ粒子で低エネルギーの物理が記述されているはずで、そのために課している条件である。とどのつまり Weyl spinor は成分が 2 個であることを反映している。これは考える理論の前提条件といえる。

それに対して (iii) は必ずしも必要な条件とは言えないが、安定した真空を達成するために課しておく。

こういった考えで Weyl fermion がどのように表現できているか確認しておく。N 成分の ψ を考えているが縮退点付近に注目する限り、大事なのは ψ_i と ψ_{i+1} の線型結合である。そこでその 2 成分に注目することにして、$\boldsymbol{p}_{deg}$ 付近の固有値方程式は、

$$H(\boldsymbol{p})\, u^i(\boldsymbol{p}) = \omega_i(\boldsymbol{p})\, u^i(\boldsymbol{p}) \tag{34}$$

$$H(\boldsymbol{p})\, u^{i+1}(\boldsymbol{p}) = \omega_{i+1}(\boldsymbol{p})\, u^{i+1}(\boldsymbol{p}) \tag{35}$$

となる。これを

$$u = \begin{pmatrix} u^i \\ u^{i+1} \end{pmatrix}$$

とまとめて書くことにして、

$$H^{(2)}(\boldsymbol{p})\, u(\boldsymbol{p}) = \omega(\boldsymbol{p})\, u(\boldsymbol{p}) \tag{36}$$

ここでこの $H^{(2)}$ を $\boldsymbol{p}_{deg}$ の周りでテイラー展開すると、

$$H^{(2)}(\boldsymbol{p}) = \omega_{deg}(\boldsymbol{p}_{deg}) + (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_{deg})_k\sigma^\alpha V_\alpha^k + (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_{deg})\boldsymbol{a} + \mathcal{O}\left((\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_{deg})^2\right) \tag{37}$$

となる。ここで $\boldsymbol{a}$,V_α^k は縮退点に依存する定数である。このテイラー展開で先の固有値方程式 (36) 式は、

$$(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_{deg})_k\sigma^\alpha V_\alpha^k u(\boldsymbol{p}) = \{\omega(\boldsymbol{p}) - \omega_{deg}(\boldsymbol{p}_{deg}) - (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_{deg})\boldsymbol{a}\}\, u(\boldsymbol{p}) \tag{38}$$

と変形できる。ここで実質的な運動量として

$$\begin{aligned} \omega_{\rm pr} &= \omega(\boldsymbol{p}) - \omega_{deg}(\boldsymbol{p}_{deg}) \\ \boldsymbol{p}_{\rm pr} &= \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{deg} \end{aligned} \tag{39}$$

を導入する。新しい座標系として

$$\begin{aligned} P_0 &= \omega_{\rm pr} - \boldsymbol{p}_{\rm pr}\boldsymbol{a} \\ P_\alpha &= (\boldsymbol{p}_{\rm pr})_k V_\alpha^k \end{aligned} \tag{40}$$

を考えると、先の方程式は

$$\boldsymbol{\sigma P}\, u(\boldsymbol{p}) = P_0\, u(\boldsymbol{p}) \tag{41}$$

となっている。つまりそれぞれの縮退点で 1 種類の Weyl fermion が表現されているのである。

この $u(\boldsymbol{p})$ のスピンについて考えておくと、(41) 式は生成子 (generater) が $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ である回転の下で不変になっているので、$u(\boldsymbol{p})$ のスピンは $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ といえる。$P_0 > 0$ の状態ならば $\boldsymbol{\sigma P} > 0$ となるので、$(P_0, \boldsymbol{P})$ 座標で $+1$ のヘリシティーを持っていることになる。

$(P_0, \boldsymbol{P})$ と $(\omega_{\rm pr}, \boldsymbol{p}_{\rm pr})$ の座標系の間の関係を確認しておく。座標系 $(\omega_{\rm pr}, \boldsymbol{p}_{\rm pr})$ は右手系に定めることにし、P の基底ベクトルを $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ とする。すると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &\rightarrow (e_1)_{\rm pr} = V^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{e}_2 &\rightarrow (e_2)_{\rm pr} = V^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{e}_3 &\rightarrow (e_3)_{\rm pr} = V^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

であるから、これで P 座標系が右手系か左手系かがわかる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_3\cdot(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2) &= \det\left((e_1)_{\rm pr}, (e_2)_{\rm pr}, (e_3)_{\rm pr}\right)\\
&= \det\left(V^{-1}\right)
\end{aligned} \tag{42}$$

より、$\det V$ の符号で P 座標系の向きがわかるのである。

方針

特定の i に対する固有値方程式:

$$H(\boldsymbol{p})|\omega_i(\boldsymbol{p})\rangle = \omega_i(\boldsymbol{p})|\omega_i(\boldsymbol{p})\rangle$$

は $\omega_i(\boldsymbol{p}) = \omega_{i+1}(\boldsymbol{p})$ or $\omega_i(\boldsymbol{p}) = \omega_{i-i}(\boldsymbol{p})$ である $\boldsymbol{p}$ を除いたあらゆる $\boldsymbol{p}$ の値に対して N 次元複素空間上の直線を決定する。つまり $\boldsymbol{p}$ は複素射影空間 $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ での点を決定する[3] のである。

証明の考え方は次の通り:

[3] $N-1$ 次元の複素射影空間は N 次元複素空間の直線上の点を同一視したものである。つまり N 次元複素空間上の直線は、$N-1$ 次元複素射影空間の “点” である。

(i) それぞれの縮退点の付近で、無限小の球面 S^2 を描き、$|\omega_i(\boldsymbol{p})\rangle$ によって決定される S^2 から $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ への写像を考える。$\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$ を計算し[4]、それらの写像が $\boldsymbol{Z}$ の ± 1 の要素に対応していることを示す。この $\boldsymbol{Z}$ の要素というのは、問題にしている縮退点に対応する粒子が右巻きか左巻きかに依存する。

(ii) $|\omega_i(\boldsymbol{p})\rangle$ によって決定される Brillouin zone 全体 (S^2 にホモトープ) から $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ への写像というものを考えて、それが $\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$ の単位元に属することを示す。

(iii) (ii) の写像のクラスは (i) で言及した小さな球面 S^2 からの固有 ray の写像のクラスの和になっていることを証明する。

(iv) $\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$ の 2 種類の表し方に矛盾が生じないようにするためには次の式が要求される。すなわち

$$N_r(i,i+1) - N_r(i-1,i) = N_\ell(i,i+1) - N_\ell(i-1,i) \tag{43}$$

ここで例えば $N_r(i,j)$ とは i 番目と j 番目のレベルの間の右巻き縮退点の個数を表している。もしも i がフェルミ面より上の最低のエネルギーレベルで、かつ $i+1$ がフェルミ面下最高のエネルギーレベルだったとすると Weyl 粒子の右巻きの種類数は $N_r(i,i+1)$ に等しくなる。

(i) と (ii) より、$\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$ と同形である $\boldsymbol{Z}$ の整数を具体的に勘定する。それには次の $\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$ から $\boldsymbol{Z}$ への同値関係を利用する:

$$\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1}) \xleftarrow{j_*} \pi_2(S^{2N-1}, S^1) \xrightarrow{\partial} \pi_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} \boldsymbol{Z} \tag{44}$$

3.2 定理の証明

縮退点に対する $\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$

縮退点付近で無限小球面 S^2 を考える。次の写像

$$f: \quad S^2 \to \boldsymbol{C}P^{N-1} \tag{45}$$

はホモトピークラス $[f]$ を決め、それは $\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$ の要素になる。

関数 f は与えられた H と i 番目のレベルでもって決定される。つまり、

$$\begin{gathered} \boldsymbol{p} \in S^2 \\ S^2 = \{\, \boldsymbol{p} \mid |\boldsymbol{p}| = \epsilon \,(\text{無限小})\, \} \end{gathered} \tag{46}$$

に対して f は、

$$f(\boldsymbol{p}) = \{\, z|\omega_i(\boldsymbol{p})\rangle \mid z \in \boldsymbol{C}\backslash 0\} \tag{47}$$

と与えられる。

[4] $\pi_2(\cdots)$ はホモトピー群を表す。

ここで $\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$ と相対ホモトピー群 $\pi_2(S^{2N-1}, S^1)$ の間には同形写像が存在する。後半の要素は次のタイプのホモトピークラスである

$$g: \quad E_2, S^1 \ \rightarrow \ S^{2N-1}, S^1 \tag{48}$$

ここで E_2 とは

$$E_2 = \{x \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, x^2 \leq 1\}$$

で左辺に現われる S^1 は E_2 の境界 (すなわち $S^1 = \{x \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, x^2 = 1\}$) である。

S^{2N-1} は複素 N 次元空間で

$$S^{2N-1} = \{u \in \boldsymbol{C}^N \,|\, |u|^2 = 1\}$$

さらに右辺の S^1 は proportional vector の部分集合で

$$S^1 = \{e^{1\delta} u_0 \in \boldsymbol{C}^N \,|\, \delta \in \boldsymbol{R}\}$$

である。ここで u_0 とは

$$u_0 \in S^{2N-1}$$

である。

$\pi_2(\boldsymbol{C}P^N)$ と $\pi_2(S^{2N-1}, S^1)$ 間の同値関係は次の関係式から導かれる。

$$f = \pi \circ g \tag{49}$$

ここで π というのは射影で

$$\pi: \quad S^{2N-1} \rightarrow \boldsymbol{C}P^{N-1} \tag{50}$$

すなわち、π は S^{2N-1} の要素に属するような直線を $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ に変更する。この写像は 、次の写像を派生させる。

$$j_*: \quad \pi_2(S^{2N-1}, S^1) \rightarrow \pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1}) \tag{51}$$

この写像の定義は

$$j_*([g]) = [f] = [\pi \circ g] \tag{52}$$

である。

以上を図にすると下のようになる。

$$\begin{array}{ccccc} & & E_2, S^1 & & \\ & g\swarrow & [g] & \xrightarrow[j_*]{} [\pi \circ g] & \searrow \pi \circ g \\ S^{2N-1}, S^1 & & \xrightarrow[\pi]{} & & \boldsymbol{C}P^{N-1} \end{array}$$

先の (49) 式では無限小球面 S^2 が E_2 から得られる多様体と同一視できることを前提としていて、その際は $S^1 = \partial E_2$ は 1 点 (すなわち北極 N) と同一視するようにする。すると $S^2 \backslash \{N\}$ と E_2 の内部は 1 対 1 に対応する。

S^2 上の点を (ϵ, θ, ϕ) で表すと、

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon \sin\theta \cos\phi \,, \\ P_y &= \epsilon \sin\theta \sin\phi \,, \\ P_z &= \epsilon \cos\theta \end{aligned} \tag{53}$$

であり、N 極 $(\theta = 0)$ と S 極 $(\theta = \pi)$ 以外でこの表式はユニークになっている。これを E_2 で表すと

$$x_1 = \frac{\pi - \theta}{\pi} \cos\phi \,, \tag{54}$$

$$x_2 = \frac{\pi - \theta}{\pi} \sin\phi \tag{55}$$

となり、これは $\theta = \pi$ 以外でユニークになっている。

上記 2 つの対応関係は

$$\begin{aligned} S^2\text{の N 極} &\longleftrightarrow E_2\text{の境界} \\ S^2\text{の S 極} &\longleftrightarrow E_2\text{の中心} \end{aligned}$$

である。

$\pi_2(S^{2N-1}, S^1)$

それでは、f に対応した g の形を具体的に構成してみよう。$H(\boldsymbol{p})$ が $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{deg}$ で対角化されるように $\boldsymbol{C}^N$ の基底を選ぶことにする。そして $H(\boldsymbol{p})$ を $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{deg}$ の周りでテイラー展開する:

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{p}) = \;& H(\boldsymbol{p}_{deg}) + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{deg}) V \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \boldsymbol{\sigma} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \\ & + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{deg}) \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_N \end{pmatrix} + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{deg}) \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left((\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{deg})^2\right) \end{aligned} \tag{56}$$

2 項目は摂動理論の最低の次数で固有ベクトルを得るために重要な項である。

ここから

$$|\omega_i(p)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{57}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{58}$$

を得て、

$$\boldsymbol{\sigma P}\, u = |\boldsymbol{P}|\, u \tag{59}$$

である。つまり upper レベル i での正の固有値を得たのである。

関数 g として

$$g = |\omega_i(\boldsymbol{p})\rangle \tag{60}$$

と定義することにする。なおここの $\boldsymbol{p}$ とは $\boldsymbol{p}_{deg}$ 付近の無限小球面 S^2 の 1 点である。u に関しては次の制約を課す。

(i) 規格化されていて $|u| = 1$。これは $|\omega_i(\boldsymbol{p})\rangle$ が S^{2N-1} 上に留まるために必要。

(ii) 位相の制約として $\arg u_2 = 0$、すなわち

$$\mathrm{Re}\, u_2 > 0\,, \quad \mathrm{Im}\, u_2 = 0$$

この制約 (i)(ii) の元で先の解は

$$u = \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{\sqrt{2|p|(|p|-p_z)}}\,, \\ \sqrt{\frac{1}{2}(1 - p_z/|p|),} \end{pmatrix} \tag{61}$$

もしくは球面座標で

$$u = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos\frac{1}{2}\theta, \\ \sin\frac{1}{2}\theta \quad , \end{pmatrix} \tag{62}$$

と表せる。

ここで忘れてはならないのは、この u は北極 $\theta = 0$ でユニークではないということである。この位相の任意性は、上で行った位相への制約が $u_1 = 0$ に対して何も規定していないことに起因する。しかし北極というのは $S^1 = \partial E_2$ に対応するので、問題にならない。g は連続であり、S^1 上の g の値として E_2 の内部からの値のみに限定することにする。

これにより $\pi_2(S^{2N-1}, S^1)$ のクラス $j_*^{-1}([f])$ に対する g の表現の構成が完了した。

$$g(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{-i\phi}\cos\frac{1}{2}\theta \\ \sin\frac{1}{2}\theta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{63}$$

縮退点のヘリシティー

ここで $[g]$ の境界写像 ∂ による像を具体的な同形関係 (44) 式で見付けることができる。写像 ∂ は境界 $S_1 = \partial E_2$ (すなわち $\theta = 0$) に制限することなので、$\partial([g]) \in \pi_1(S^1)$ は単純に

$$g(\phi)|_{S^1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{-i\phi} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{64}$$

と表現できる。ここで

$$g(\phi)|_{S^1} \in S^1 \subset S^{2N-1} \tag{65}$$

である。$S^1 \subset S^{2N-1}$ は北極において $|\omega_i(\boldsymbol{p})\rangle$ の可能なあらゆる位相全てから成っている。g は明らかに $S^1 \subset E_2$ から $S^1 \subset S^{2N-1}$ への同相写像になっている。同形写像 ∂ によってクラス $[g|_{S^1}] \in \pi_1(S^1)$ に関係付けられる整数は、定義から巻きつき数 (winding number) でしかない。上の式の形からその巻きつき数は $+1$ か -1 のどちらかである。すなわち、

$$\Delta \circ \partial \circ j_*^{-1}([f]) = \pm 1 \tag{66}$$

縮退点で $\det\, V_i^\alpha > 0$ の場合、対応する系 P は右手系である。するとこの整数は -1 である。

このことが意味しているのは、i 番目の (upper) レベルの状態によって左巻きの Weyl fermion が記述されているということ。もしも $\det\, V_i^\alpha < 0$ ならば対応する座標系 P は左

手系となり、故に $g(\theta,\phi)$ に対して $P_x \to -P_x$ という修正を加えて

$$g(\phi)|_{S_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{i\phi} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{67}$$

を得て、これに対応する整数は $+1$ である。

今のところ考察の対象にしているのは upper レベル i の正の固有値の場合だけである。これを lower レベル $i+1$ に対して

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{P}\, u = -|\boldsymbol{P}|u \tag{68}$$

と置き換えてみよう。そうすることは $\boldsymbol{P}$ を $-\boldsymbol{P}$ に置き換えることに対応する。このことは系の右手系と左手系を取り換えることと同等であり、$\det(V_i^\alpha)$ の符号を変えることと同じ効果になる。

これより $\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$ の整数要素に対して次の一覧が得られる。これらは縮退点の周りの無限小球面 S^2 に対応する。その球面は i 番目のレベルで P の右手座標系の向きとする。

$$\begin{array}{c} \text{レベル i の縮退 (with i+1)} \\ \left.\begin{array}{l} i \text{ に対して正のヘリシティー} \\ i+1 \text{ に対して負のヘリシティー} \end{array}\right\} \quad -1 \text{ の要素} \\ \left.\begin{array}{l} i \text{ に対して負のヘリシティー} \\ i+1 \text{ に対して正のヘリシティー} \end{array}\right\} \quad +1 \text{ の要素} \end{array} \tag{69}$$

Brillouin zone の表面に対する $\pi_2(CP^{N-1})$

次に示すのは Brillouin zone の表面 S^2 から $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ への写像 $\hat{f}_{BS}$ が、$\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$ の同形写像 $\Delta \circ \partial \circ j_*^{-1}$ によって 0 に対応するホモトピークラスに属しているということである。なおこの写像 $\hat{f}_{BS}$ は固有状態 $|\omega_i(\boldsymbol{p})\rangle$ で決定する。

Brillouin zone の 6 つの面上の固有状態はそれぞれ反対面と同一である。また 4 つの平行な辺の組 3 つに対しても $|\omega_i(\boldsymbol{p})\rangle$ は同じであり、8 つの頂点においても $|\omega_i(\boldsymbol{p})\rangle$ は同一である。これらのことに注意しつつ証明を行う。その手順は次の通り:

(i) 写像 $\hat{f}_{BS}$ の $\hat{f}_d$ への連続的な変形によって、12 辺全てと 8 つの頂点を 1 点とするようなものに置き換えられる。

(ii) この変形写像 $\hat{f}_d$ を用いて、$\hat{f}_{BS}$ は 6 つの項 (要素) の和であることを示す。なおその 6 つの項は 3 つの組に分けられる。

(iii) それぞれの組の項の和は 0 であることが示せる。故に 6 つの項を全て足した結果も 0 といえる。

(i) で主張した変形を行うために、まずは Brillouin zone の表面 S^2 が $|\omega_i(\boldsymbol{p})\rangle$ となる写像 f_{BS} によって $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ にどのように埋め込まれているかを考えてみよう。

周期性から Brillouin zone の向き合う 2 つの面は、$\hat{f}_{BS}$ によって $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ の表面の同じ piece の反対向きの面として移される。さらに Brillouin zone の 4 つの平行な辺のセット (3 つ) は $\hat{f}_{BS}$ によってそれぞれただ一つの閉じた曲線に移される。写像の結果として得られた $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ の 3 つの曲線は閉じている (図 3 参照)。なぜならば周期性から 8 つの頂点は必ず $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ の 1 つの点に移されるからである。この点を起点として用いることにする。すなわち、S^2 の S 極をこの点に移すような写像に話を限るのである。

$\boldsymbol{C}P^{N-1}$ は単連結なので 3 つの閉じた曲線をそれぞれただ 1 点に縮める手段は存在する。その 1 点というのは頂点の $\hat{f}_{BS}$ による像である。辺に限った $\hat{f}_{BS}$ のこの変形は、辺に限らない $\hat{f}_{BS}$ の変形に拡張できる。その変形写像 $\hat{f}_d$ という写像は全ての辺を 1 点 (起点) に移すような写像で、$\hat{f}_{BS}$ は変形写像 $\hat{f}_d$ とホモトープである。

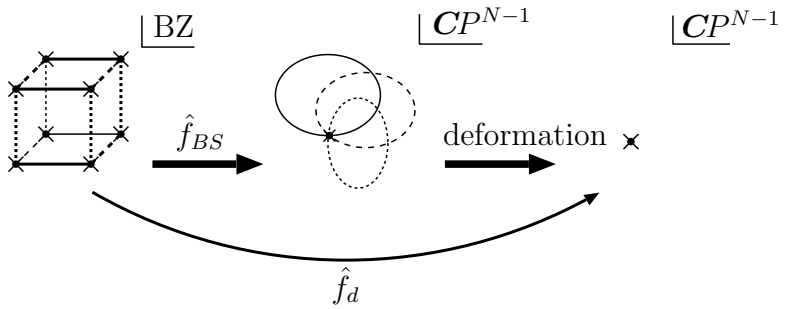


図 3: 変形写像 $\hat{f}_d$

証明の次の段階として (ii) を考える。これは π_2 の算法を思い出せば、当り前のことである。Brillouin zone の表面 S^2 を 2 つの部分に分けてみよう: 1 つ目は 1 つの面であり、2 つ目は残りの 5 つの面全てである。(図 4 参照)

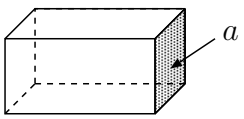


図 4: Brillouin zone surface

写像 $\hat{f}_d$ は $\hat{f}_a$ と $\hat{f}_5$ によって定義される 2 つの部分にわけることができる。$\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$ は可換で、加法群になっているので

$$[\hat{f}_d] = [\hat{f}_a] + [\hat{f}_5] \tag{70}$$

となる。

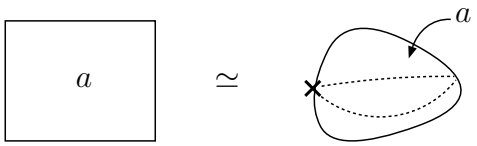


図 5:

(70) 式右辺の 1 つ目の写像 $\hat{f}_a$ の方は S^2 の 1 つの面 a に対応しているが、これは図 5 にあるような全ての辺の組を同一視することによって作られる “袋” から $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ への写像になっている。すなわち、

$$\hat{f}_a \ : \text{図 5 の } S^2\text{表面} \to \boldsymbol{C}P^{N-1}$$

(70) 式右辺 2 つ目のものは

$$\hat{f}_5 \ : \text{図 4 の面 } a \text{ 以外の } S^2\text{表面} \to \boldsymbol{C}P^{N-1}$$

である。

$\hat{f}_5$ をさらに $\hat{f}_b$ と $\hat{f}_4$ に分けることもできる。

$$[\hat{f}_5] = [\hat{f}_b] + [\hat{f}_4] \tag{71}$$

こういった作業を繰り返していけば、

$$[\hat{f}_d] = [\hat{f}_a] + [\hat{f}_{\bar{a}}] + [\hat{f}_b] + [\hat{f}_{\bar{b}}] + [\hat{f}_c] + [\hat{f}_{\bar{c}}] \tag{72}$$

を得る。6 つの項はそれぞれ一つの面に対応し、a と $\bar{a}$ は逆の面を表す。

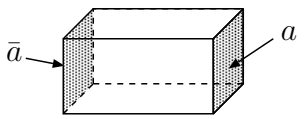


図 6: Brillouin zone surface

(iii) の段階。表面 a と $\bar{a}$ は周期性によって向きが逆である。そのために $\hat{f}_a$ と $\hat{f}_{\bar{a}}$ は互いに鏡像の関係になっている。すなわち、

$$\hat{f}_{\bar{a}} = \hat{f}_a \cdot \xi$$

ここで

$$\xi \ : \ S^2 \to S^2$$

S^2 は面であって ξ は S^2 の大きな円の鏡像である:

$$\hat{f}_{\bar{a}} = -\hat{f}_a \tag{73}$$

同様の関係式は b と $\bar{b}$ や c と $\bar{c}$ にも成り立つ。そこで

$$[\hat{f}_d] = 0 \tag{74}$$

が成り立つ。この $[\hat{f}_d]$ は当然 $[\hat{f}_{BS}]$ と同じクラスなので、

$$[\hat{f}_{BS}] = 0 \tag{75}$$

ということになる。

証明の完成

Brillouin zone S^2 球面の表面は、縮退点の近傍の無限小 S^2 を含んでいる。ここですべての無限小球面 S^2 を共通の起点を持つように変形する。π_2 は加群なので

$$[\hat{f}_{BS}] = \sum_j [f_j] \tag{76}$$

と分けることができる。f_j とは無限小球面 $S^2 \to \boldsymbol{C}P^{N-1}$ の写像で、j はすべての無限小球面 S^2 を走る。この式の左辺が 0 になることはすでに示しているので、

$$\sum_j [f_j] = 0 \tag{77}$$

がいえる。

(69) 式の結果より、i 番目と $i+1$ 番目の縮退点に対応する $+1$(もしくは -1) と i 番目と $i-1$ 番目の縮退点に対応する $+1$(もしくは -1) の和は、0 であるということ。つまり、

$$N_r(i, i+1) - N_r(i-1, i) = N_\ell(i, i+1) - N_\ell(i-1, i) \tag{78}$$

を得る。ここで $N_r(i, i+1)$ というのはレベル i とレベル $i+1$ の縮退点の数で、i 番目が正のヘリシティーであるものとしている。

No-go 定理として証明したいのは

$$N_r(i, i+1) = N_\ell(i, i+1) \tag{79}$$

という式である。これは帰納法によって証明することができる。

まず最高のレベル $i = 1$ に対しては明らかに

$$N_r(0, 1) = N_\ell(0, 1) = 0$$

である。なぜなら $i = 0$ のレベルはないから。そして (78) 式を見れば明らかなように、$i-1$ に対して

$$N_r(i-1, i) = N_\ell(i-1, i)$$

が成立したなら、

$$N_r(i, i+1) = N_\ell(i, i+1)$$

も成立する。これで帰納法は完成し、(79) 式の証明となる。

i 番目と $i+1$ 番目のレベルの縮退点はそれぞれひとつの Weyl 粒子の種類 (species) に対応している。すなわち上の (79) 式は「Weyl 粒子の右巻きと左巻きは必ず同じ数だけ現われる」ことを示している。これが no-go 定理である。

3.3 理論に含まれるフェルミオンの最低数

前節の証明で用いたのと同じ手法を用いて、理論には少なくとも何個のダブラーが現われるかを数えてみる。

証明に用いる大事な点についてここで軽く復習しておくと、まず 前節で示したことで重要なのは、縮退点 (=粒子を表す) 周りの S^2 を考えそこから $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ への写像を考えたとき、その $\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$ の要素として、右巻きなら -1, 左巻きなら $+1$ の要素が対応するということ。

また Brillouin zone の境界面から $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ への写像を考え、その $\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$ の要素を考えるわけだが、運動量の周期性から Brillouin zone の各頂点は $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ 上で同じ点に移り、12 本の辺は同じ点で交わる 3 本の線に移ることがわかる。そして連続的な変形でもって 12 本の辺が同じ点に移るような写像を考えることでき、その写像の $\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$ を考察の対象にした場合、Brillouin zone の向かい合う面同士は $\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$ の要素として反対符号のものを与えることになる。

以上のことから「右巻き粒子と左巻き粒子は同じ数だけ理論に存在する」ということを示した。この節では同じような考察で、「粒子は 3 次元空間の場合、最低でも 8 つ存在する」ことを示す。

まず Brillouin zone を図 7 のように 2 つに分けることにし、境界面を x と表す。

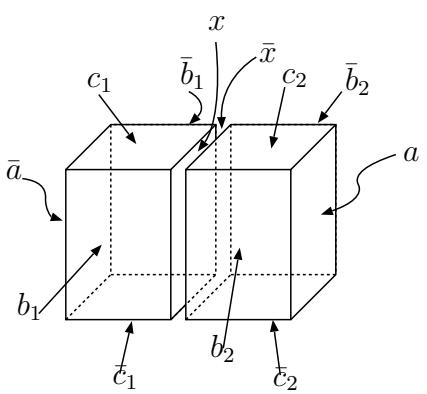


図 7: Brillouin zone の分割

このように分割した上でそれぞれの Brillouin zone に対する $\pi_2(\boldsymbol{C}P^{N-1})$ を計算する。便宜上、分割したうちの片方を Brillouin zone 1、他方を Brillouin zone 2 と呼ぶことにする。

Brillouin zone 1 に注目し、かつこの表面から $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ への写像として、12 本の辺を同じ 1 点に移す写像を考える。

そのような写像を考えた場合、Brillouin zone 1 の境界各頂点は 1 点に移り、さらに面 x を囲む辺は 1 点で交わる 2 本の曲線に移される (図 8 参照)。このような場合、連続的な辺形でもって、これらの曲線を 1 点に縮小することが可能である。そこで Brillouin zone 1 の表面から $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ への写像として、3 節の $\hat{f}_d$ からさらに連続的な変形をして面 x の周囲も 1 点に移す写像 $\hat{f}_{dd}$ を考えることにする。これはもともとの Brillouin zone 1 から

$\boldsymbol{C}P^{N-1}$ への写像 $\hat{f}_{BZ1}$ から連続的に変形したものなので

$$[\hat{f}_{BZ1}] = [\hat{f}_{dd}]$$

が成り立っている。

図 8: 面 x の 4 辺の変換結果

ここで 3 節 (70) 式と同じく $\hat{f}_{dd}$ を分割していくと、

$$[\hat{f}_{dd}] = [\hat{f}_{\bar{a}d}] + [\hat{f}_{b_1 d}] + [\hat{f}_{c_1 d}] + [\hat{f}_{\bar{b}_1 d}] + [\hat{f}_{\bar{c}_1 d}] + [\hat{f}_{xd}] \tag{80}$$

となるが、面 b_1 や c_1 については (b_1 と $\bar{b}_1$ は周期性を考えると $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ の同じ面の表裏に移ることから)

$$[\hat{f}_{b_1 d}] = -[\hat{f}_{\bar{b}_1 d}] \tag{81}$$

が成立しているので

$$[\hat{f}_{dd}] = [\hat{f}_{\bar{a}d}] + [\hat{f}_{xd}] \tag{82}$$

である。

同様の議論を Brillouin zone 2 についても行えば、

$$\begin{aligned} [\hat{f}_{BZ1}] &= [\hat{f}_{\bar{a}d}] + [\hat{f}_{xd}] \\ [\hat{f}_{BZ2}] &= [\hat{f}_{ad}] + [\hat{f}_{\bar{x}d}] \end{aligned} \tag{83}$$

である。

ここで面 a については先と同じく周期性を考えて

$$[\hat{f}_{ad}] = -[\hat{f}_{\bar{a}d}] \tag{84}$$

が成立している。さらに面 x について考えてみるが、面 x と面 $\bar{x}$ はやはり $\boldsymbol{C}P^{N-1}$ でも同じ面の表裏に移ることから

$$[\hat{f}_{xd}] = -[\hat{f}_{\bar{x}d}] \tag{85}$$

が成り立つ。

(84) 式と (85) 式を考えることによって結果として

$$[\hat{f}_{BZ1}] = -[\hat{f}_{BZ2}] \tag{86}$$

が得られる。

この式は仮に白丸を右巻き黒丸を左巻き粒子とした際に、図 9 のように Brillouin zone 1 と Brillouin zone 2 に異なるタイプの粒子が同数あることを示している。

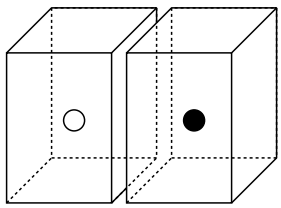


図 9: 右巻き粒子と左巻き粒子がひとつずつある場合

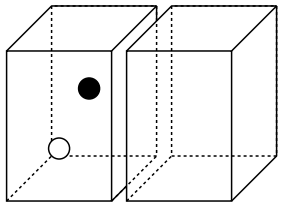


図 10: 右巻き粒子と左巻き粒子が片方の Brillouin zone にある場合

図 9 の場合、

$$[\hat{f}_{BZ1}] = -1\ ,\ [\hat{f}_{BZ2}] = +1$$

となっている。この他にも (86) 式を満たしそうなものとして、片方の Brillouin zone に右巻きと左巻きが同数あり、他方の Brillouin zone には粒子がないという場合を考えるかもしれない (図 10 参照)。

しかしこれは許されず、片方の Brillouin zone に右巻きと左巻きが 1 つずつあったとすると、他方の Brillouin zone にも左巻きと右巻きが 1 つずつ存在しなければならない (図 11 参照)。

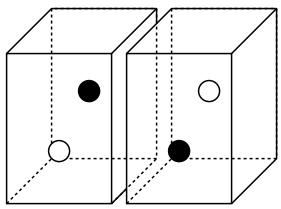


図 11: 二分した Brillouin zone には右巻き粒子と左巻き粒子は等しく存在する

なぜならば、図 10 のように片方の Brillouin zone にだけ粒子が偏在していたとすると、例えば面 $\bar{a}$ に注目した際に、次の図 12 のように面内に $+1$ の部分と -1 の部分ができる。ところがそれと同じ面の反対側であるはずの面 a にはなんの要素もないということになる。これでは a と $\bar{a}$ が同じ面の反対側になりえない。

正しく考えるならば、12 の図に対しては、次の図 13 のようになるはずである。

面 x についても同様に議論でき、結果として図 10 のように片方に粒子を偏在させようとしても、図 11 のように他方にも対応する粒子が必要になる。

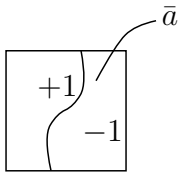


図 12: 片方の Brillouin zone に偏在した右巻き粒子と左巻き粒子

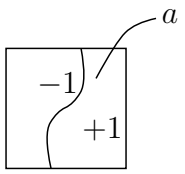


図 13: 片方の Brillouin zone に偏在した右巻き粒子と左巻き粒子 2

以上は Brillouin zone をある 1 方向について二分した場合について論じているが、これはその方向の選び方に依存しない。任意の方向に対して成り立つ議論であった。そこでそれぞれの方向に対して、以上の議論を当てはめることにする。すると、図 14 のようになる。

まず何も粒子を配置しない状態。これは (86) 式の条件をちゃんと満たしている。が、このような状態を考えてもなにも出てこない。少なくとも 1 つの粒子が理論を構成する上で必要であろう。

そこで 1 つの粒子を Brillouin zone に配置したとする。はじめにもっと多くの粒子を配置してしまうことも可能だが、余分な粒子 (doubler) を問題にしているのだから、はじめに入れる粒子は少ない方がいいだろう。

しかし 1 つ入れると Brillouin zone を二分したときの他方に反対ヘリシティの粒子がなければならない。さらに別の方向についても Brillouin zone の二分を行うとさらに粒子は増え、またさらに別の (残りの) 方向についても Brillouin zone の二分を行うことができ、結果としては図 14 の (e) にあるように 8 つの粒子 (d を次元数として 2^d 個) の粒子が現われることになる。

つまり格子の理論でフェルミオンを考えた場合、フェルミオンは最低でも 2^d 個現われる。

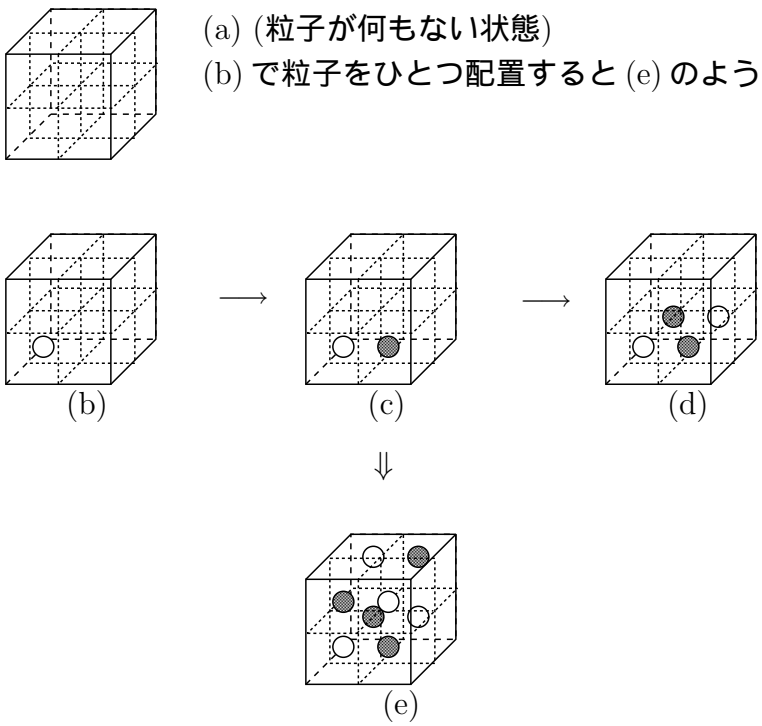


図 14: Brillouin zone でみる最低個数の粒子数

4　ダブラー問題に対する Wilson のやり方

3 節で見た Nilsen-Ninomiya 定理が証明されるまでにはやや時間がかかったものの、2 節で確認したようなダブラーが存在するという問題は早くから知られていた。

この問題に対して、格子理論を提案した Wilson は

ダブラーに質量を与える項を導入し、ダブラーを現われなくしてしまう。

という対策を考えた。通常の期待通りの粒子を与える $p_\mu = 0$ の位置には補正がつかず、$p_\mu = \pm\pi/a$ の位置にのみ補正が加わるような項を Dirac 演算子に付け加えるのである。

4.1　Wilson fermion

具体的には連続理論の Dirac 演算子: $D = i\gamma^\mu\partial_\mu - M$ の代わりに

$$D = i\gamma^\mu\partial^*_\mu - M - \frac{a}{2}\triangle^*_\mu\triangle_\mu \tag{87}$$

としてしまうのである。なお上式の a は格子サイズで、連続極限: $a \to 0$ をとると、元の Dirac 演算子に戻る[5]。$-\frac{a}{2}\triangle^*_\mu\triangle_\mu$ の部分が Wilson の発想で、この部分は格子間隔 a に比例する新たな質量項のようなものになっている。

この (87) 式の Dirac 演算子で、ダブラーがなくなっていることを簡単に見てみよう。2 節でやったようにフェルミオンの相関関数を計算して、粒子がでてくる様子を見てみる。

2 節の繰り返しになるが、フェルミオンの作用は

$$S_F = a^4\sum_x \bar\psi(x)D\psi(x) \tag{88}$$

である。ここで $K(x,y)$ を次のように導入する:

$$S_F = a^4\sum_{x,y} \bar\psi(y)K(x,y)\psi(x) \tag{10}$$

この $K(x,y)$ は (87) 式の Dirac 演算子を使った (88) 式との整合性を保つためには、

$$K(x,y) = \frac{1}{2}\gamma^\mu(\delta_{y\,x-\hat\mu} - \delta_{y\,x+\hat\mu}) - M\delta_{y\,x} - \frac{a}{2}(\delta_{y\,x-\hat\mu} - 2\delta_{x,y} + \delta_{y\,x+\hat\mu}) \tag{89}$$

でなければならない。

(87) 式の D を用いて、

$$\langle\psi\bar\psi\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi\exp[-\int d^4x'\bar\psi D\psi]\psi\bar\psi}{\int \mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi\exp[-\int d^4x'\bar\psi D\psi]}$$

を計算するわけだが、これは 2 節でやったように、

$$\langle\psi(x)\bar\psi(y)\rangle = K^{-1}(x,y) \tag{11}$$

[5] ∂^*_μ や $\triangle_\mu$, $\triangle^*_\mu$ の定義は 6 ページ参照

これに上の (89) 式と

$$\delta_{x\,y} = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \tag{13}$$

を用いて計算すれば、(87) 式で付け加えられた項は質量項への補正を与えて、

$$\langle \psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma^\mu \tilde{p}_\mu - \tilde{M}}{\tilde{p}^2 + \tilde{M}^2} e^{ip(x-y)} \quad , \tag{90}$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\mu &= \frac{1}{a}\sin ap_\mu \quad , \\ \tilde{M} &= M + \frac{1}{a}(1-\cos ap_\mu) \end{aligned} \tag{91}$$

となるのである。

(91) 式の最後の項が、Wilson による補正項である。(90) 式の分母が 0 になるところに粒子があると考え、さらに $M=0$ のカイラルフェルミオンを考えた場合 (91) 式の補正項によって、単純にフェルミオンを格子に乗せた場合のダブラー ($p=\pm\pi/a$) に質量 (のようなもの) が与えられて、粒子ではなくなっているのがわかるだろう。

4.2 Wilson のやり方におけるダブラーについて

単純にフェルミオンを格子に乗せると運動量の各方向に対して $\tilde{p}_\mu = \frac{1}{a}\sin ap_\mu$ となり、$p_\mu = 0$ 以外に $p_\mu = \pi/a$ という粒子がでてきてしまう。それがダブラーであり、このように運動量に周期性があるかぎりダブラーは必ず現われるというのが no-go 定理である。Wilson のやり方はこれらに対してどのような対処をしているのだろうか。

Wilson は単純にフェルミオンを格子に乗せるだけでなく、余分な項 $-\frac{a}{2}\triangle_\mu^*\triangle_\mu$ を付け加えている。この項は運動量空間においては $\frac{1}{a}(1-\cos ap_\mu)$ という項を付け加えることになる。この $\frac{1}{a}(1-\cos ap_\mu)$ という項をよく見てみると、期待する粒子を表す $p_\mu = 0$ では 0 になり、ダブラーである $p_\mu = \pi/a$ では $2a$ という "重み" を粒子に与えている。

つまり Wilson の方法では、$\tilde{p}_\mu$ の周期性は保ちつつ、うまくダブラーのみに重みを与える異なる周期を持つ項で補正しているのである。この項のおかげでダブラーは粒子として存在しないようになっている。この補正項は格子サイズ a に比例するために、連続極限ではちゃんと Weyl fermion の式を再現する。

この方法はフェルミオンにダブラーが存在することが知られてすぐに試みられた対処法であり、計算機によるシミュレーションではとてもうまくいっている。計算機によるシミュレーションでは、後に述べる Lüscher fermion(6 節参照) よりも収束性がよく、また計算させやすい。

しかしこの方法が完璧だというわけではない。それは計算機シミュレーションではなく、専ら理論的な観点からの不満である。

この Wilson の補正項は、それが質量に相当する項を与えることからもわかる通り、カイラル対称性を明らかに破っているのである。計算機で計算する場合には、カイラル対

称性を重要視する必要はほとんどないだろう。しかし純粋に理論としてみた場合、もしくは自らの手で解析しようという場合には、カイラル対称性が完全に失われているというのはなんとも心許ないところである。

つまりこの Wilson のやり方は、計算法としては十分な効力を持っているが、カイラル対称性を完全に犠牲にしているという点で物足りなさがあるということである。そのために Wilson fermion 以外のやり方もいろいろと検討されることになったのである。この論文では Wilson 以外のやり方として、staggerd fermion と Lüscher fermion と呼ばれる 2 つの方法に注目している。

4.3 超対称性への拡張に関するコメント

この節を終えるにあたって、格子における超対称性、特に Wilson fermion の考え方を用いた超対称性への拡張について若干のコメントを付け加えておこう。

Wilson のやり方は早くから知られていただけに、超対称性への拡張も早くから検討されている。たとえば文献 [27] といった論文である。(なおこの文献の数値シミュレーションについては文献 [32] がある)

格子で超対称性を表すための困難はいくつかあるが、特にこの Wilson のやり方における弱点は、カイラル対称性に対してそうであったのと同じく、“質量項の存在” である。Wilson fermion を用いた超対称性の格子理論は、gaugino に質量項を導入するため、超対称性を確保することができないのである。

もちろん連続極限では超対称性が再現できるようになっていて、それを根拠にしてこの方法は正しく非摂動効果を採り入れていると信じられているのである。

5 Staggerd Fermions

4節でみたWilson fermionと並んで広く知られているダブラーを回避する手段に、staggerd fermionと呼ばれるものがある。

これは右巻きのフェルミオンと左巻きのフェルミオンを別々のサイトに乗せ、ダブラーの分の自由度もさらに別のサイトに乗せて、格子の各サイトにはそれぞれ1つだけ自由度を対応させるというやり方。そのことによりフェルミオンの各自由度にとっての有効格子サイズは2倍になり、それ以上のダブラーは現われなくなる。

Staggerd fermionの考え方:
有効格子サイズ(effective lattice spacing)が2倍になるようにフェルミオンの自由度を格子の各サイトに分配する。

5.1 概要

2節でどのようにダブラーが存在すると判断したかを思い出してみると、フェルミオンの相関関数の分母が0になる点が複数ある、ということからである。その式は

$$\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma^\mu \tilde{p}_\mu - M}{\tilde{p}^2 + M^2} e^{ip(x-y)} \quad , \tag{15}$$

$$\tilde{p}_\mu = \frac{1}{a}\sin ap_\mu \tag{16}$$

であるが、staggerd fermionでは特にここの積分範囲:

$$-\frac{\pi}{a} \leq p_\mu \leq \frac{\pi}{a} \tag{14}$$

に注目する。

(15)式の積分範囲に現われている格子サイズaの部分が$2a$ならば、ダブラーは現われないことになるだろう。実際の格子サイズを変えることはできないので、各スピノールの成分に関係する格子サイズ(有効格子サイズ)が$2a$になるように考えるのである。

例えば具体的に2次元の場合は、スピノールは2成分なので偶数番目のサイトに左巻き成分を配置し、奇数番目のサイトに右巻き成分を配置するというようにするのである。そのようにすれば、それぞれの成分にとっての有効格子サイズは通常の格子サイズの2倍になる。

ただ一般にスピノールの自由度は全ての方向の有効格子サイズを2倍にするには不足している。2次元の場合でも各方向で有効格子サイズを2倍にするためには4つのサイトになにかしらの自由度を配置する必要があるのに対して、スピノールの自由度は2つしかない。このままでは自由度が不足している。

その不足分を補うために、staggerd fermionではフェルミオンにフレイバーの自由度を与えて、複数のフェルミオンを用意する。

2次元での例を続けると、ひとつめの方向には左巻き成分と右巻き成分を交互に配置し、ふたつめの方向では異なるフレイバーのフェルミオン(例えばuクォークとdクォーク)を交互に配置する...というものである。(図15参照)

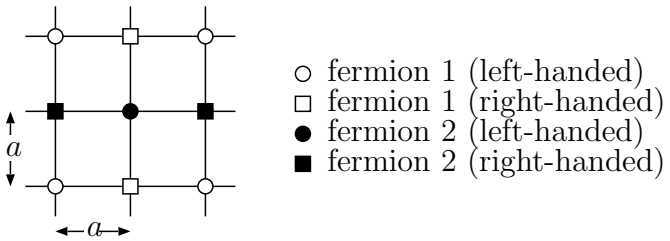


図 15: Staggerd fermion (2 次元)

一般に次元数を d としたときにどれだけ余分なフェルミオンが必要かを考えてみる。

有効格子サイズ (effective lattice spacing) を 2 倍にするために必要なサイト数は 2^d であるのに対し、d 次元のスピノールの成分の数は $2^{d/2}$ である[6]。なので、結局 $2^{d/2}$ 個の異なるフェルミオンが必要ということになる (表 1 参照)。ちなみに 4 次元の場合は、4 種類のフェルミオンが必要ということになる。

格子のサイト数	2^d
スピノールの成分数	$2^{d/2}$
$\Downarrow$	
$2^{d/2}$ 種類のフェルミオンが必要	

表 1: Staggerd fermion のフレイバー数 (d 次元)

5.2 2 次元の staggerd fermion とカイラル対称性

2 次元の場合について、具体的に staggerd fermion を構成してみよう。

単純な考え方

まずは単純な考え方でフェルミオンの自由度を分配して、それに対するカイラル対称性がどのように実現されているのかを見てみる。なお、この小節でのやり方は、文献 [7] を参考にしている[7]。

2 次元の γ 行列としては

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{92}$$

[6]偶数次元であるとする

[7]Susskind の論文 [7] では、2 次元とせず 1+1 次元として考えている。つまり時間成分を特別扱いすることで、2 次元に関しては特に新たにフレイバーを考えないで済むようになっている。

を選んでおく。

フェルミオンのスピノールとしての自由度を各サイトに分配することを考えるわけだが、まず次の性質を満たす 1 成分の場 ϕ を考えてみる。

$$\partial_0\phi = \partial_1\phi \tag{93}$$

この ϕ を格子上の各サイトに配置する。

ここで ϕ' として

$$\phi'(n,m) = (-1)^{n+m}\phi(n,m) \tag{94}$$

を定義する。ただしここの n, m はそれぞれ 0 方向,1 方向のサイト番号であるとする。この ϕ' に関して、n: 偶数 , m: 偶数 の場合を考えてみると、(93) 式より、

$$\partial_0^*\phi'(n,m) = \partial_1^*\phi'(n,m) \tag{95}$$

を満たす。これに対して n: 偶数 , m: 奇数 の場合を考えてみると、

$$\begin{aligned}\partial_0^*\phi'(n,m) &= (-1)\partial_0^*\phi(n,m)\\ &= (-1)\partial_1^*\phi(n,m)\\ &= (-1)(\phi(n,m+1) - \phi(n,m-1))\\ &= -\partial_1^*\phi'(n,m)\end{aligned} \tag{96}$$

となる。つまり、n: 偶数 , m: 偶数 は ψ_L を表し、n: 偶数 , m: 奇数 は ψ_R を表している。

同様に n の偶奇にも注意すると、

$$\begin{array}{lcll}\psi_L^1(n.m) & \leftrightarrow & \phi(n,m) & (n,m:\text{ even})\\ \psi_R^1(n.m) & \leftrightarrow & (-1)^m\phi(n,m) & (n\text{: even, } m\text{: odd})\\ \psi_L^2(n.m) & \leftrightarrow & (-1)^{n+m}\phi(n,m) & (n,m:\text{ odd})\\ \psi_R^2(n.m) & \leftrightarrow & (-1)^n\phi(n,m) & (n\text{: odd, } m\text{: even})\end{array} \tag{97}$$

の対応ができている。これが望んでいたフェルミオンの自由度の分配のやり方といえる。

並進不変性とカイラル対称性

さて (93) 式を満たす場 ϕ の作用を考えてみると、

$$S = a^2\sum_{n,m}\phi^\dagger(n,m)(\partial_0^* + \partial_1^*)\phi(n,m) \tag{98}$$

である。

この作用は $\ell.\ell'$ を任意の整数として、

$$\left\{\begin{array}{lcl} n & \to & n+\ell'\\ m & \to & m+\ell\end{array}\right. \tag{99}$$

で対称になっている。

作用のこの対称性は、偶数の ℓ に関しては ψ_L を ψ_L に, ψ_R を ψ_R にしているだけだが、奇数の ℓ に関しては、ψ_L を ψ_R に, ψ_R を ψ_L に変換している。これはまさに γ_5 の効果であり、この 2 次元の staggerd fermion の考え方では、カイラル対称性はサイトを奇数個ズラす対称性を表しているといえる。

これまではフェルミオンの質量項を入れていなかったので、作用 (98) 式がカイラル対称性 (サイトを奇数ズラす対称性) があるのも頷ける。では、フェルミオンの質量項を考えた場合にこのカイラル対称性はどうなるだろうか。

フェルミオンの質量項は $m\bar{\psi}\psi$ の組合せである。これを ϕ で考えると、

$$\begin{aligned}\sum M\bar{\psi}(n,m)\psi(n,m) &= M\sum \psi_L^\dagger(n,m)\psi_L(n,m) - \psi_R^\dagger(n,m)\psi_R(n,m) \\ &\to M\sum_{n,m}(-1)^m\phi(n,m) \end{aligned} \tag{100}$$

となり、$m \to m+\ell$ (ℓ: 奇数) の対称性は消えている。これは質量項の存在によってカイラル対称性が消えることとちゃんと整合している。

問題点と改良

ここまでの話は文献 [7] を参考にして、単純にフェルミオンの自由度を分配し、新しくフレイバーを導入した。この作用はこのままでは、異なるフレイバー同士の運動項が存在していて、その点が望ましくない。運動項としては、同一のフレイバー同士の積になっている方がいいだろう。

そのための方法もある。

それは格子の各サイトに単純にフェルミオンのスピノール成分を配置するのではなく、格子の各サイトに分配された自由度の組み合せでもって、新たにフェルミオンのスピノール成分を定義するのである。

具体的にいま考えている 2 次元の場合なら、

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{92}$$

としているので、

$$\begin{aligned} \psi_L^1 &= \phi + \phi_{12} \\ \psi_R^1 &= \phi_1 - \phi_2 \\ \psi_L^2 &= \phi_1 + \phi_2 \\ \psi_R^2 &= \phi - \phi_{12} \end{aligned} \tag{101}$$

という組み合せでスピノールの成分を定義すればよい。なお $\phi, \phi_1, \phi_2, \phi_{12}$ については図 16

を参照の通りで、

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi(n,m) \quad \text{(n,m: even)} \\
\phi_1 &= \phi(n,m) \quad \text{(n: even , m: odd)} \\
\phi_2 &= \phi(n,m) \quad \text{(n: odd , m: even)} \\
\phi_{12} &= \phi(n,m) \quad \text{(n,m: odd)}
\end{aligned} \tag{102}$$

と考える。

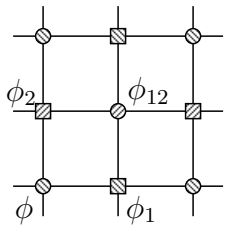


図 16: 2 次元の staggerd fermion (その 2)

5.3 d 次元での staggerd fermion

同様の議論を任意の d 次元についても扱っておこう。ここでははじめからフェルミオンのスピノール成分は各サイトに分配された自由度の線型結合で得られるものとする。

任意の d 次元について

格子の各サイトにスピノール場 ψ が分配されているとする。ひとまずこの段階では成分でなくスピノール全体がサイトに乗っていると考えておく。その ψ を次の関係で χ と結びつける。なおここの χ は ψ と同じくスピノールの成分を持つもので、単に書き換えを行っているだけである。

$$\begin{cases}
\psi_\alpha(x) = \dfrac{1}{N_0} \left\{ (\gamma^1)^{x_1} (\gamma^2)^{x_2} \cdots (\gamma^d)^{x_d} \right\}_{\alpha\beta} \chi_\beta(x) \\
\bar{\psi}_\alpha(x) = \dfrac{1}{N_0} \bar{\chi}_\beta(x) \left\{ (\gamma^d)^{x_d} \cdots (\gamma^2)^{x_2} (\gamma^1)^{x_1} \right\}_{\beta\alpha}
\end{cases} \tag{103}$$

なおここで格子空間における位置 x として $x = (ax_1, ax_2, \cdots, ax_d)$ であるとしている。N_0 は適当な規格化定数とする。

考える作用は

$$\begin{aligned}
S &= a^d \sum_x \left[\bar{\psi}(x) D \psi(x) + M \bar{\psi}(x) \psi(x) \right] \\
&= \frac{1}{2} a^{d-1} \sum_{x,\mu} \left[\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x + a\hat{\mu}) - \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x - a\hat{\mu}) \right] + M a^d \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x)
\end{aligned} \tag{104}$$

である。これを $\chi, \bar{\chi}$ を用いて表現することを試みる。すると具体的に計算して明らかなように、

$$\bar{\psi}_\alpha(x)\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta(x+a\hat{\mu}) = (-1)^{x_1+x_2+\cdots+x_{\mu-1}}\bar{\chi}_\alpha(x)\chi_\alpha(x+a\hat{\mu})$$

である。(この式を考えるときは $\bar{\psi}(x)$ と $\psi(x+a\hat{\mu})$ では (γ^μ) の数が 1 つ異なることに注意せよ。)

ここで新しい変数として

$$\eta_\mu(x) = (-1)^{x_1+x_2+\cdots+x_{\mu-1}}\,,\ \eta_1(x) = 1 \tag{105}$$

を導入すると、

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_\alpha(x)\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta(x+a\hat{\mu}) &= \eta_\mu(x)\bar{\chi}_\alpha(x)\chi_\alpha(x+a\hat{\mu}) \\
\bar{\psi}_\alpha(x)\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta(x-a\hat{\mu}) &= \eta_\mu(x)\bar{\chi}_\alpha(x)\chi_\alpha(x-a\hat{\mu}) \\
\bar{\psi}(x)\psi(x) &= \bar{\chi}(x)\chi(x)
\end{aligned} \tag{106}$$

が成立している。これらを用いて (104) 式を書き換えれば、

$$S = \frac{1}{2}a^{d-1}\sum_{x,\mu}\eta_\mu(x)\left[\bar{\chi}_\alpha(x)\chi_\alpha(x+a\hat{\mu}) - \bar{\chi}_\alpha(x)\chi_\alpha(x-a\hat{\mu})\right] + Ma^d\sum_x\bar{\chi}_\alpha(x)\chi_\alpha(x) \tag{107}$$

となる。ここまでは、あくまで (104) 式を書き換えただけである。

そしてここで、発想をひとつ飛躍させる。この式に現われているスピノールの足である α をなくしてしまうのである。そうして得られた式が d 次元における staggerd fermion の作用である。もとの χ と区別するためにこれを ϕ と記述することにすると:

$$S = \frac{1}{2}a^{d-1}\sum_{x,\mu}\eta_\mu(x)\left[\bar{\phi}(x)\phi(x+a\hat{\mu}) - \bar{\phi}(x)\phi(x-a\hat{\mu})\right] + Ma^d\sum_x\bar{\phi}(x)\phi(x) \tag{108}$$

が d 次元の staggerd fermion の作用なのである。

χ をスピノールでなく 1 成分の関数だと考えると、(103) 式は左辺が $2^{d/2}$ 行で右辺が $2^{d/2}\times 2^{d/2}$ の行列となってつり合わない。そこでその分としてフェルミオンにフレイバーを導入して、

$$\left[\psi^1(x), \psi^2(x), \cdots, \psi^{2^{d/2}}(x)\right] = \frac{1}{N_0}(\gamma^1)^{n_1}(\gamma^2)^{n_2}\cdots(\gamma^d)^{n_d}\phi(x) \tag{109}$$

とするのである。

5.4 Staggerd fermion におけるダブラー回避の考え方について

Staggerd fermion ではどのようにしてダブラーの発生を防いでいるのだろうか。それを考えるために先の (108) 式の作用を、あらためてフェルミ場 ψ^f で書き表してみよう。

フェルミオンと場に分配された自由度の間の関係:

$$\left[\psi^1(x), \psi^2(x), \cdots, \psi^{2^{d/2}}(x)\right] = \frac{1}{N_0}(\gamma^1)^{x_1}(\gamma^2)^{x_2}\cdots(\gamma^d)^{x_d}\phi(x) \tag{109}$$

の形に注意すると、ψ^f は各方向に $2a$ 飛びで同じものが配置されているのがわかるだろう[8]。そこで、空間は大きさが $2a$ の格子に分割されていて、その大きな格子の各サイトに一辺が a の単位格子が存在していると考えよう。フェルミオンはその単位格子ごとに分配されているとするのである。(図 17 を参照)

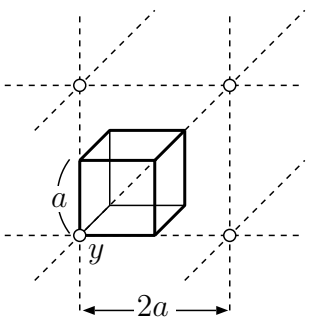


図 17: 空間に単位格子を配置させる

大きな格子サイズを A と表すことにして (つまり $A = 2a$)、その格子のサイトを示す座標を y とする。また単位格子内の位置を表すための座標として ρ を導入する。これらと元の格子の座標 x との関係は、

$$x_\mu = 2y_\mu + \rho_\mu \tag{110}$$

である。ただし

$$\begin{aligned} x &= a(x_1, \cdots, x_\mu, \cdots, x_d) \qquad x_\mu : \text{integer} \\ y &= A(y_1, \cdots, y_\mu, \cdots, y_d) \qquad y_\mu : \text{integer} \\ \rho &= a(\rho_1, \cdots, \rho_\mu, \cdots, \rho_d) \qquad \rho_\mu = 0, 1 \end{aligned}$$

としている。

さて x から y, ρ への書き換えは少しずつ確認していこう。まずは $\phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x - a\hat{\mu})$ がどのように書き換えられるかだが、これは ρ の値 (格子点 y にある単位格子内の位置) によって状況は変わってくる。つまり次の関係式:

$$\begin{aligned} x + a\hat{\mu} = \delta_{\rho_\mu,1} &\left\{ \begin{array}{l} y_\mu \to y_\mu + 1\ , \\ \rho_\mu (= 1) \to \rho_\mu - 1 (= 0) \end{array} \right\} \\ &+ \delta_{\rho_\mu,0} \left\{ \begin{array}{l} y_\mu \to y_\mu\ , \\ \rho_\mu (= 0) \to \rho_\mu + 1 (= 1) \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{111}$$

に注意する必要がある (図 18 も参照せよ)。

これより、

$$\phi(x + a\hat{\mu}) = \delta_{\rho_\mu,1}\phi_{\rho - a\hat{\mu}}(y + A\hat{\mu}) + \delta_{\rho_\mu,0}\phi_{\rho + a\hat{\mu}}(y) \tag{112}$$

が得られる。なおここで

$$\phi(x) = \phi_\rho(y)$$

[8]ただしメトリックは全て正とした。負のメトリックがある場合は $2a$ ごとに符号の変化もある。

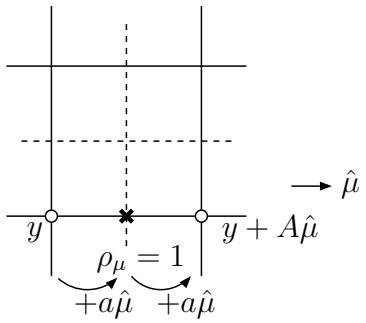


図 18: $x + a\hat{\mu}$ の効果

と表記している。ϕ の下付き添字はスピノールの足ではないので混同しないように。ρ は位置 y にある単位格子内の位置を表している。

同様の関係式は $x - a\hat{\mu}$ に関しても考えられて、

$$\phi(x - a\hat{\mu}) = \delta_{\rho_\mu,1}\phi_{\rho - a\hat{\mu}}(y) + \delta_{\rho_\mu,0}\phi_{\rho + a\hat{\mu}}(y - A\hat{\mu}) \tag{113}$$

これらに注意すると、

$$\begin{aligned}\phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x - a\hat{\mu}) = \delta_{\rho_\mu,1}\left[\phi_{\rho - a\hat{\mu}}(y + A\hat{\mu}) - \phi_{\rho - a\hat{\mu}}(y)\right] \\ + \delta_{\rho_\mu,0}\left[\phi_{\rho + a\hat{\mu}}(y) - \phi_{\rho + a\hat{\mu}}(y - A\hat{\mu})\right]\end{aligned} \tag{114}$$

という関係が成り立つことが示せる。

また作用に現われる $\eta_\mu(x)$ だが、

$$\begin{aligned}\eta_\mu(x) &= (-1)^{x_1 + x_2 + \cdots + x_{\mu-1}} \\ &= (-1)^{\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_{\mu-1}} \quad \equiv \eta_\mu(\rho)\end{aligned} \tag{115}$$

が成り立つ。

以上を用いて (108) 式:

$$S = \frac{1}{2}a^{d-1}\sum_{x,\mu}\eta_\mu(x)\left[\bar{\phi}(x)\phi(x + a\hat{\mu}) - \bar{\phi}(x)\phi(x - a\hat{\mu})\right] + Ma^d\sum_x \bar{\phi}(x)\phi(x) \tag{108}$$

を y, ρ に書き直す。ただし議論したいのはカイラルフェルミオンのダブラーがどう扱われているかなので、以下では $M = 0$ に話を限定し ϕ の運動項のみに注目する。$M \neq 0$ のときは単に $M\sum_f \bar{\psi}^f\psi^f$ の項が付け加わるだけである。

さて $M = 0$ として話を進めると、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}a^{d-1}\sum_{x,\mu}\eta_\mu(x)\left[\bar{\phi}(x)\phi(x + a\hat{\mu}) - \bar{\phi}(x)\phi(x - a\hat{\mu})\right] \\ &= \frac{1}{2}a^{d-1}\sum_{y,\rho,\mu}\eta_\mu(\rho)\bar{\phi}_\rho(y)\left\{\delta_{\rho_\mu,1}\left[\phi_{\rho - a\hat{\mu}}(y + A\hat{\mu}) - \phi_{\rho - a\hat{\mu}}(y)\right] + \delta_{\rho_\mu,0}\left[\phi_{\rho + a\hat{\mu}}(y) - \phi_{\rho + a\hat{\mu}}(y - A\hat{\mu})\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}a^{d-1}\sum_{y,\rho,\rho',\mu}\eta_\mu(\rho)\bar{\phi}_\rho(y)\left\{\delta_{\rho - a\hat{\mu},\rho'}\left[\phi_{\rho'}(y + A\hat{\mu}) - \phi_{\rho'}(y)\right] + \delta_{\rho + a\hat{\mu},\rho'}\left[\phi_{\rho'}(y) - \phi_{\rho'}(y - A\hat{\mu})\right]\right\}\end{aligned} \tag{116}$$

ここでさらに

$$\begin{aligned}
&\delta_{\rho-a\hat{\mu},\rho'}\left[\phi_{\rho'}(y+A\hat{\mu})-\phi_{\rho'}(y)\right]+\delta_{\rho+a\hat{\mu},\rho'}\left[\phi_{\rho'}(y)-\phi_{\rho'}(y-A\hat{\mu})\right]\\
&\qquad=\frac{1}{2}(\delta_{\rho-a\hat{\mu},\rho'}+\delta_{\rho+a\hat{\mu},\rho'})\left[\phi_{\rho'}(y+A\hat{\mu})-\phi_{\rho'}(y-A\hat{\mu})\right]\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{2}(\delta_{\rho-a\hat{\mu},\rho'}-\delta_{\rho+a\hat{\mu},\rho'})\left[\phi_{\rho'}(y+A\hat{\mu})-2\phi_{\rho'}(y)+\phi_{\rho'}(y-A\hat{\mu})\right]
\end{aligned}\tag{117}$$

という関係を使い、次のように Γ, Γ^5 という表記を導入すると

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu}_{\rho\rho'}&\equiv\eta_{\mu}(\rho)(\delta_{\rho-a\hat{\mu},\rho'}+\delta_{\rho+a\hat{\mu},\rho'})\\
\Gamma^{5\mu}_{\rho\rho'}&\equiv\eta_{\mu}(\rho)(\delta_{\rho-a\hat{\mu},\rho'}-\delta_{\rho+a\hat{\mu},\rho'})
\end{aligned}\tag{118}$$

から、

$$\begin{aligned}
S=\frac{1}{4}a^{d-1}\sum_{y,\rho,\rho',\mu}\Big(&\bar{\phi}_{\rho}(y)\Gamma^{\mu}_{\rho\rho'}\left[\phi_{\rho'}(y+A\hat{\mu})-\phi_{\rho'}(y-A\hat{\mu})\right]\\
&+\bar{\phi}_{\rho}(y)\Gamma^{5\mu}_{\rho\rho'}\left[\phi_{\rho'}(y+A\hat{\mu})-2\phi_{\rho'}(y)+\phi_{\rho'}(y-A\hat{\mu})\right]\Big)
\end{aligned}\tag{119}$$

である。

さて ϕ と ψ の間の関係だが、

$$\begin{aligned}
\psi_{\alpha}{}^{f}(x)&=\frac{1}{N_0}\{(\gamma^1)^{x_1}\cdots(\gamma^d)^{x_d}\}_{\alpha}{}^{f}\phi(x)\\
&=\frac{1}{N_0}\{(\gamma^1)^{\rho_1}\cdots(\gamma^d)^{\rho_d}\}_{\alpha}{}^{f}\phi_{\rho}(y)\\
&\equiv U_{\alpha}{}^{f}(\rho)\phi(x)
\end{aligned}\tag{120}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}^{f}{}_{\alpha}(x)&=\frac{1}{N_0}\bar{\phi}(x)\{(\gamma^d)^{x_d}\cdots(\gamma^1)^{x_1}\}^{f}{}_{\alpha}\\
&=\frac{1}{N_0}\bar{\phi}(y)\{(\gamma^d)^{\rho_d}\cdots(\gamma^1)^{\rho_1}\}^{f}{}_{\alpha}\\
&=\bar{\phi}(x)U^{\dagger f}{}_{\alpha}(\rho)
\end{aligned}\tag{121}$$

で、(ただしメトリックは全て正だとした[9])

$$U^{\dagger f}{}_{\alpha}(\rho)U_{\alpha}{}^{f}(\rho)=2^{-d/2}\delta_{\rho\rho'}$$

に注意すると[10]、

$$\begin{cases}
\phi_{\rho}(y)=2^{d/2}U^{\dagger f}{}_{\alpha}(\rho)\psi_{\alpha}{}^{f}(x)\\
\bar{\phi}_{\rho}(y)=2^{d/2}\bar{\psi}^{f}{}_{\alpha}(x)U_{\alpha}{}^{f}(\rho)
\end{cases}\tag{122}$$

である。

[9]もし一部のメトリックが負ならば、U の定義に $(-1)^{y_1+y_2+\cdots}$ といった項を含めて定義し直せばよい。
[10]規格化定数 N_0 が $N_0=2^{d/2}$ であることにも注意。

さらに

$$\sum_{\rho\rho'} U_\alpha{}^f(\rho)\Gamma^\mu_{\rho\rho'}U^{\dagger f'}{}_{\alpha'}(\rho') = (\gamma^\mu)_{\alpha\alpha'}\delta^{ff'}$$
$$\sum_{\rho\rho'} U_\alpha{}^f(\rho)\Gamma^{5\mu}_{\rho\rho'}U^{\dagger f'}{}_{\alpha'}(\rho') = (\gamma_5)_{\alpha\alpha'}(\gamma^\mu\gamma_5)^{ff'}$$

の関係も用いると、

$$S = \frac{1}{2}A^{d-1}\sum_{f,y,\mu}\bar{\psi}^f(y)\gamma^\mu\left[\psi^f(y+A\hat{\mu}) - \psi^f(y-A\hat{\mu})\right] + \frac{1}{2}A^{d-1}\sum_{f,f',y,\mu,\alpha,\alpha'}\bar{\psi}^f_\alpha(y)(\gamma_5)_{\alpha\alpha'}(\gamma^\mu\gamma_5)^{ff'}\left[\psi^{f'}_{\alpha'}(y+A\hat{\mu}) - 2\psi^{f'}_{\alpha'}(y) + \psi^{f'}_{\alpha'}(y-A\hat{\mu})\right] \tag{123}$$

である。これが求めたかったstaggerd fermionをフェルミ場ψで表現した式である。

この式を見るとフェルミオンに対する通常の運動項の他に、異なるフレイバー間を繋ぐ相互作用項が現われていることがわかるだろう。まず(123)式の第二項はWilson fermionと同じくダブラーに質量を与える項である。この第二項によって、staggerd fermionでダブラーは現われなくなっている。

この質量項がWilson fermionの質量項とどう違うかを確認してみよう。まず先に(123)式を次のように書き直しておこう。次の式では$A \to a$, $y \to x$と書き替えている。

$$S = a^4\sum_{f,x,\mu}\bar{\psi}^f(x)\gamma^\mu\partial^*_\mu\psi^f(x) + \frac{a}{2}a^4\sum_{f,f',x,\mu,\alpha,\alpha'}\bar{\psi}^f_\alpha(x)(\gamma_5)_{\alpha\alpha'}(\gamma^\mu\gamma_5)^{ff'}\Box_\mu\psi^{f'}_{\alpha'}(x) \tag{124}$$

ここで$\Box_\mu \equiv \triangle^*_\mu\triangle_\mu$ (ただしμの和は取らない)という記号を導入した。同様の記号を用いて、Wilson fermionで複数のフレイバーを導入した場合を記述し、見比べてみると、

$$S = a^4\sum_{f,x,\mu}\bar{\psi}^f(x)\gamma^\mu\partial^*_\mu\psi^f(x) + \frac{a}{2}a^4\sum_{f,f',x,\mu,\alpha,\alpha'}\bar{\psi}^f_\alpha(x)\delta_{\alpha\alpha'}\delta^{ff'}\Box_\mu\psi^{f'}_{\alpha'}(x) \tag{125}$$

となる。これは先の式とよく似ているが、Wilson fermionの式である。

この2つの式を見比べれば、

- 運動項は共通していること
- 格子サイズに比例し2階微分に相当する差分演算子がダブラーに質量を与える効果を出していること

が見てとれるだろう。運動項が共通しているのは、これらが連続極限でWeyl fermionを表現するためには当然のことである。

そして格子サイズに比例する“質量項”の違いだが、これはつまり$(\gamma_5)_{\alpha\alpha'}(\gamma^\mu\gamma_5)^{ff'}$と$(\mathbb{1})_{\alpha\alpha'}(\mathbb{1})^{ff'}$の違いである。つまりWilson fermionでは異なるフレイバー間は完全に独立した関係なのに対し、staggerd fermionでは異なるフレイバー間に関係が付けられている。

また staggerd fermion の質量項と Wilson fermion の質量項との違いは、次の対称性の下で不変になっているかどうかも挙げられるだろう。

$$\psi_\alpha^f \to (e^{\epsilon\gamma_5})_{ff'}\psi_\alpha^{f'}$$

これは異なるフレイバー間のカイラル変換のようなものである。staggerd fermion の質量項はこの変換の下で不変の形になっている。

つまり staggerd fermion でも Wilson fermion のときと同じく質量項を入れてダブラーを消しているものの、staggerd fermion ではその質量項の入れ方が特殊なカイラル不変性を保つような形になっているのである。ただしそういった質量項の入れ方をした分、異なるフレイバー間を結ぶ相互作用が現われている。

5.5 超対称性への拡張例: Itoh らの試みについて

Staggerd fermion を用いて超対称性を表現しようという試みも古くからなされている。論文としては文献 [31] などがある。

ここではそういった以前からある方法ではなく、ごく最近に提案された方法について検討してみたい。ここの議論は文献 [38] によるもので、これは 2001 年末に提案されたものである。この論文は続編として文献 [39] があり、さらにいくつかの続く論文も予定されているようである。

この理論の概要

この理論はゲージ場とフェルミオンの場に対する作用と変換として、ごく自然な形を導入する。ただその導入のやり方では新たな変数を導入しなければならない。そこで超対称変換の下で理論が不変になるように条件を課すことで、その新たに導入された変数の間に成り立つ関係式を導くのである。

またそれらの作用や超対称変換は、一辺が 1 格子サイズの単位格子上で定義されたもので、これを one-cell 模型と呼ぶ。one-cell 模型の作用および超対称変換が得られたならば、それを全空間に拡張することも可能であるというのが、文献 [38] における主張である。

それでは one-cell 模型に対する作用と超対称変換を順に見ていこう。

ゲージとフェルミオンに対する格子超対称変換

ゲージ場とフェルミオンに対する作用は、それが単位格子 (一辺が格子サイズ a であるような格子) 上のみに限られている点とフェルミ場が実数値である点を除いて、通常と同じ形で導入する。つまり、

$$\begin{aligned} S_g &= -\beta \sum_{n,\mu\nu} \mathrm{tr}\,(U_{n(\mu\nu),\mu\nu} + U_{n(\mu\nu),\nu\mu}) \\ S_f &= \sum_{n,\rho} b_\rho(n(\rho))\,\mathrm{tr}\,\left\{\psi_{n(\rho)}U_{n(\rho),\rho}\psi_{n(\rho)+\hat{\rho}}U^\dagger_{n(\rho),\rho} - \psi_{n(\rho)+\hat{\rho}}U^\dagger_{n(\rho),\rho}\psi_{n(\rho)}U_{n(\rho),\rho}\right\} \end{aligned} \tag{126}$$

である。なおいくつか導入した記法について説明しておくと、$n(\mu\nu)$ は plaquette $(n, \mu\nu)$ の基点 (base point) で (図 19 も参照)、また $n(\rho)$ という記号は ρ 座標に関して $n_\rho = 0$ となる点である。フェルミオンの作用についている係数 b_ρ は通常の staggerd fermion に現われるものと同じもの。

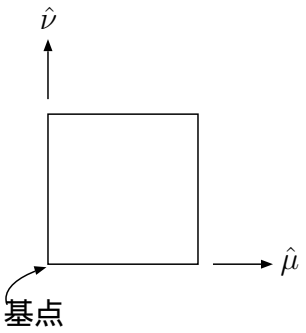


図 19: plaquette の基点

$\rho(n)$ という記号も用いることにして、サイト n から出発して cell 内の $\hat{\rho}$ と $-\hat{\rho}$ を示すものとする。ゲージ場の超対称変換は次のように定義される。

$$\delta U_{n(\mu),\mu} = \sum_\rho \left\{ \alpha^{\rho(n)}_{n(\mu),\mu} \xi^{\rho(n)}_{n(\mu)} U_{n(\mu),\mu} + U_{n(\mu),\mu} \alpha^{\rho(n)}_{n(\mu)+\hat{\mu},\mu} \xi^{\rho(n)}_{n(\mu)+\hat{\mu}} \right\} \tag{127}$$

ここで ξ^μ_n とは gauge-covariantly translated fermion で $U_{n,\mu}\psi_{n+\hat{\mu}}U^\dagger_{n,\mu}$ である。さらに α はグラスマン数である。

フェルミ場に対する超対称変換は、

$$\delta\psi_n = \sum_{0<\mu<\nu} C^{(\mu\nu)(n)}_n \left[U_{n,(\mu\nu)(n)} - U_{n,(\nu\mu)(n)} \right] \tag{128}$$

なお $(\mu\nu)(n)$ とは $(-)^{n_\mu}\hat{\mu}(-)^{n_\nu}\hat{\nu}$ を表し、$C^{\mu\nu}_n$ はグラスマンの変数である。

この理論の超対称不変性

それではここで先に導入した変数の間に成り立つ関係式を求めよう。先に導入した作用と変換の式に対して、超対称変換の下で不変になるように要請する。つまり理論の全作用 $S_f + S_g$ が超対称変換の下で不変になるという条件を課す:

$$\delta_U S_f + \delta_\psi S_f + \delta_U S_g = 0 \tag{129}$$

なおここで記号として δ_U は続く作用に対してゲージ場の変換 (127) 式を加えたもので、δ_ψ はフェルミ場の変換 (128) 式を加えたものを表すことにする。S_g にはフェルミ場は含まれていないので $\delta_\psi S_g$ は考える必要はない。

通常、理論が超対称不変というときは経路積分の測度 (measure) の変化も含めて作用の変化を考える。しかしこの理論ではそれよりも強い条件として、作用の変化が 0 にな

ることと積分の測度の変化が 0 になることを分けて要請する。ただ後で見るように作用の変化が 0 になることを要請すると、そこから得られる条件で積分の測度の変化は 0 になることが示せるのである。

それでは、まず (129) 式の条件から得られる関係式を求めてみよう。その後に、積分の測度が不変であることを確認する。

さて、条件式 (129) 式なのだが、これは左辺第一項と残りの部分を分けてそれぞれが 0 だという条件になる。つまり $\delta_U S_f = 0$ と $\delta_U S_g + \delta_\psi S_f = 0$ である。なぜならば、ゲージ場の変換式 (127) 式とフェルミオンの作用 (126) 式を思い出してみると、

$$S_f = \sum_{n,\rho} b_\rho(n(\rho)) \,\mathrm{tr}\, \left\{ \psi_{n(\rho)} U_{n(\rho),\rho} \psi_{n(\rho)+\hat{\rho}} U^\dagger_{n(\rho),\rho} - \psi_{n(\rho)+\hat{\rho}} U^\dagger_{n(\rho),\rho} \psi_{n(\rho)} U_{n(\rho),\rho} \right\} \tag{126}$$

と

$$\delta U_{n(\mu),\mu} = \sum_\rho \left\{ \alpha^{\rho(n)}_{n(\mu),\mu} \xi^{\rho(n)}_{n(\mu)} U_{n(\mu),\mu} + U_{n(\mu),\mu} \alpha^{\rho(n)}_{n(\mu)+\hat{\mu},\mu} \xi^{\rho(n)}_{n(\mu)+\hat{\mu}} \right\} \tag{127}$$

である。$\xi^\mu_n = U_{n,\mu} \psi_{n+\hat{\mu}} U^\dagger_{n,\mu}$ に注意すれば、$\delta_U S_f$ は ψ に関して 3 次であることがわかるだろう。

それに対して残りの 2 項 $\delta_\psi S_f + \delta_U S_g$ は共に ψ についての 1 次になっている。

$$S_f = \sum_{n,\rho} b_\rho(n(\rho)) \,\mathrm{tr}\, \left\{ \psi_{n(\rho)} U_{n(\rho),\rho} \psi_{n(\rho)+\hat{\rho}} U^\dagger_{n(\rho),\rho} - \psi_{n(\rho)+\hat{\rho}} U^\dagger_{n(\rho),\rho} \psi_{n(\rho)} U_{n(\rho),\rho} \right\} \tag{126}$$

と

$$\delta \psi_n = \sum_{0<\mu<\nu} C^{(\mu\nu)(n)}_n \left[U_{n,(\mu\nu)(n)} - U_{n,(\nu\mu)(n)} \right] \tag{128}$$

から $\delta_\psi S_f$ が ψ について 1 次で、

$$S_g = -\beta \sum_{n,\mu\nu} \mathrm{tr}\, (U_{n(\mu\nu),\mu\nu} + U_{n(\mu\nu),\nu\mu}) \tag{126}$$

$$\delta U_{n(\mu),\mu} = \sum_\rho \left\{ \alpha^{\rho(n)}_{n(\mu),\mu} \xi^{\rho(n)}_{n(\mu)} U_{n(\mu),\mu} + U_{n(\mu),\mu} \alpha^{\rho(n)}_{n(\mu)+\hat{\mu},\mu} \xi^{\rho(n)}_{n(\mu)+\hat{\mu}} \right\} \tag{127}$$

で $\delta_U S_g$ も ψ について 1 次。

つまり ψ の次数ごとに 0 になるべきで、そのため条件 (129) 式は

$$\delta_U S_f = 0 \tag{130}$$

$$\delta_U S_g + \delta_\psi S_f = 0 \tag{131}$$

の 2 つに分解できる。

条件 $\delta_U S_f = 0$ について

この条件から出てくる変数間の関係式は、

$$b_\rho(n) \alpha^\mu_{n,\rho} + b_\mu(n) \alpha^\rho_{n,\mu} = 0$$

で、つまり α に対する拘束条件は

$$\alpha^{\mu}_{n,\nu} = -\frac{b_\mu(n)}{b_\nu(n)}\alpha^{\nu}_{n,\mu} \tag{132}$$

である。なおこの条件式から、α の対角成分は消えることがわかる。

$$\alpha^{\rho}_{n,\rho} = 0 \tag{133}$$

条件 $\delta S = \delta_U S_g + \delta_\psi S_f = 0$ について

この条件は 2 種類のグラフについて考える必要がある。つまり μ, ν, ρ が 3 つの方向を示す場合と 2 つの方向を示す場合である。後者はつまり $\hat{\rho}$ が $\hat{\mu}$ もしくは $\hat{\nu}$ と等しい場合ということ。図 20 を参照せよ。

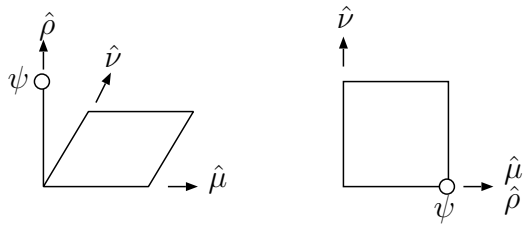


図 20: 2 種類のグラフ

これら 2 種類のグラフから、次の条件が出てくる。

$$\begin{aligned} b_\rho(n)C^{(\mu\nu)(n)}_{n} &= \beta\left[(-)^{n_\mu}\alpha^{\rho}_{n,\mu} - (-)^{n_\nu}\alpha^{\rho}_{n,\nu}\right] \\ b_\rho(n)C^{(\nu-\rho)}_{n+\hat{\rho}} + b_\nu(n)C^{(-\nu\rho)}_{n+\hat{\nu}} &= -\beta\left(\alpha^{-\rho}_{n+\hat{\rho},\nu} - \alpha^{-\nu}_{n+\hat{\nu},\rho}\right) \end{aligned} \tag{134}$$

経路積分の測度が不変であることについて

このことはそれほど明らかなものではない。そこで U と ψ を変化させることを次のような 2 段階に分けて考えてみよう。なお記号として

$$\delta U = F(\alpha, \psi, U)$$

を導入しておく。そして U と ψ を変化させることだが、

$$\begin{pmatrix} U \\ \psi \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(B)}} \begin{pmatrix} U + F(\alpha, \psi - \delta\psi, U) \\ \psi \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(A)}} \begin{pmatrix} U + F(\alpha, \psi, U) \\ \psi + \delta\psi \end{pmatrix} \tag{135}$$

という 2 段階に分けて考える。こうすると、始めの矢印と 2 つ目の矢印でともに変換のヤコビアンが 1 であることが示せるのである。

2 つ目の矢印の方が易しいので先に扱う。これは

(A) フェルミオン変数のみが変化した場合:

$$\begin{aligned} U'_{n,\mu} &= U_{n,\mu} \\ \psi'_n &= \psi_n + C^{\mu\nu}_n\left(U_{n,\mu\nu} - U_{n,\nu\mu}\right) \end{aligned} \tag{136}$$

である。これは単純に $J_A = 1$ である。
　問題は始めの矢印の方だが、こちらは
(B) ゲージ場のみを変化させるときで :

$$\begin{aligned} U'_{n,\mu} &= e^{\alpha_{n,\mu}\cdot\xi'_n} U_{n,\mu} e^{\alpha_{n+\hat{\mu},\mu}\cdot\xi'_{n+\hat{\mu}}} \\ \psi'_n &= \psi_n \end{aligned} \tag{137}$$

ここで $\alpha_{n,\mu}\cdot\xi_n = \alpha^{\rho}_{n,\mu}\xi^{\rho}_n$ と $\xi'^{\rho}_n = U_{n,\rho}\left\{\psi'_{n+\hat{\rho}} - C^{\mu\nu}_{n+\hat{\rho}}\left(U_{n+\hat{\rho},\mu\nu} - U_{n+\hat{\rho},\nu\mu}\right)\right\}U^{\dagger}_{n,\rho}$ とした。これはやや複雑に見えるが、まず $F(\alpha, \psi - \delta\psi, U)$ の $\delta\psi$ の部分は変換パラメーターの 2 次になっているので考えなくてよくて、そして残った部分の変換でのヤコビアンを計算すると、$\alpha\cdot\xi$ が純虚数 (pure imaginary) でさらに $U_{n,\mu}$ を含まない場合に、ヤコビアンは 1 になる。この「 $\alpha\cdot\xi$ が $U_{n,\mu}$ を含まない」というのはつまり

$$\alpha^{\mu}_{n,\mu} = \alpha^{-\mu}_{n+\hat{\mu},\mu} = 0 \tag{138}$$

という場合である。この条件は、もし全作用が超対称変換の下で不変であった場合には自動的に満たされる。

　よって、通常考える超対称不変性 (作用と測度の変化が合わせて 0 になる) と比べれば条件は少し厳しいが、とにかく全作用が超対称不変であるべしという要求によって、条件 (132) 式と (134) 式がつき、これによって理論が超対称不変であることが保証されるのである。
　以上で one-cell 模型での超対称不変性を確認し終えた。

cell が複数集まった模型 (Multi-cell model)

　One-cell 模型で超対称不変なものが得られれば、それを全空間に拡張することも可能であろう。文献 [38][39] では次のような拡張を提案している。

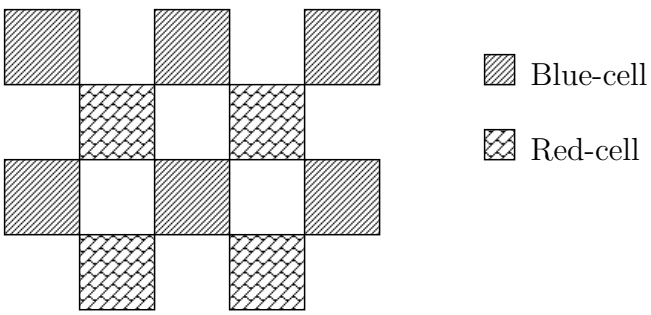


図 21: Multi-cell model

　イチマツ模様に Blue unit と Red unit を配置させて、
(B)Blue unit では one-cell 模型が存在する。
(R)Red unit では異なる one-cell 模型が存在している。

(Bl)Blank では cell 模型は存在しない。

と考えることにする。(図 21 参照)

この理論の全作用とは、blue cell と red cell をすべて足し上げたものである。

場の観点では、

(i) リンク変数 (ゲージ場) は blue cell にも red cell にも存在する。

(ii) plaquete は blue cell と red cell のみに存在し、blank unit には存在しない。

(iii) サイト変数 (fermi 場) は blue cell と red cell の境界サイトに存在する[11]。

という特徴がある。

[11] フェルミ場は blue cell のフェルミオンと red cell のフェルミオンとで dual な関係を持つことになる。

6 Lüscher Fermions

前節まででみたダブラー回避の試み (Wilson fermion,staggerd fermion) は早くから研究されていたものである。しかし 4 節の Wilson fermion は質量項の導入によってカイラル対称性を犠牲にしてしまうし、5 節の staggerd fermion は現われうるダブラーの分も新たなフレイバーとしてその自由度を分配し、結果として通常のカイラル対称性とは違った扱いをしなくてはならない。そのため格子上で通常のカイラル対称性を実現することは、難しいように見えた。

その後、3 節でみた Nielsen-Ninomiya 定理によって、格子上でカイラル対称性を実現することは不可能 (no-go!) であることが示されてしまった。この Nielsen-Ninomiya 定理 (no-go 定理) の衝撃は大きく、格子上でカイラル対称性:

$$\gamma_5 D + D\gamma_5 = 0 \tag{139}$$

を実現することは半ば諦められていた。

ところが事態は 1998 年になって動き始める。Lüscher は論文 [20] において、(139) 式のカイラル対称性を

$$\gamma_5 D + D\gamma_5 = aD\gamma_5 D \tag{140}$$

に置き換えると、格子サイズ a を 0 に近づけるにつれて通常のカイラル対称性 (139) 式に戻る上に、理論がすっきりと書けるということを指摘したのである。

また (140) 式を満たすような D は同じ 1998 年すでに見つかっていて、それにより格子上のカイラル対称性 (通常のカイラル対称性に格子サイズに比例する修正が加わったもの) についていろいろと議論されるようになった。この (140) 式の対称性を格子上のカイラル対称性、もしくは Lüscher 対称性と呼び、(140) 式を満たすフェルミオンを Lüscher fermion と呼ぶこともある[12]。

6.1 Lüscher 対称性

1982 年、Ginsparg と Wilson はカイラル対称性を持つ理論からブロックスピン変換で移り変われる理論の Dirac 演算子に対して、どのような関係式が成り立つかを導いた。文献 [16] の論文である。Ginsparg らが行った考察については 6.2 節で確認する。

その Ginsparg と Wilson の導いた式の最も単純なものが前述の (140) 式: $\gamma_5 D + D\gamma_5 = aD\gamma_5 D$ であるが、これは格子上で成立する修正されたカイラル対称性だと考えることができる。

Nielsen と Ninomiya の定理は次の 4 つの性質を満たす Dirac 演算子が格子上には存在できないということを意味している:

[12] Lüscher 対称性と呼ばれることは多くなってきているが、単に Ginsparg-Wilson 関係式と呼ばれることも多い。

また Lüscher fermion と呼ばれることはそれほど多くない。Ginsparg-Wilson 関係式を満たす Dirac 作用素の構成法にちなんで domain wall fermion や overlap fermion などと呼ばれることのほうが多い。しかしこの論文では、Ginsparg-Wilson 関係式を満たす Dirac 作用素によって表されるフェルミオンを、まとめて Lüscher fermion と呼ぶことにする。

(i) $\tilde{D}(p)$ は運動量 p_μ の周期 $2\pi/a$ の解析関数である。

(ii) カットオフより十分に小さな運動量に対しては $\tilde{D}(p) = i\gamma_\mu p_\mu$ となる。

(iii) $\tilde{D}(p)$ はあらゆる 0 でない運動量 $(\mathrm{mod}\ 2\pi/a)$ に対して、逆が存在 (invertible) している。

(iv) D は γ_5 と反交換である。

このうち (i)∼(iii) は D が格子上で定義された Dirac 演算子で、さらに Weyl fermion を表現しえるものを考えるためには外せない条件であろう[13]。そこで 4 つ目の (iv) に注目し、これを

$$\gamma_5 D + D\gamma_5 = aD\gamma_5 D \tag{140}$$

に置き換えることを Lüscher は提案した。そしてこの関係式を満たす Dirac 演算子はすでに見つかっていたのである。

その演算子は文献 [17] で Neuberger によって発見されていたものである[14]。余次元を 1 つ導入して、その余次元方向に階段型の質量項を用意すると、右巻きのフェルミオンと左巻きのフェルミオンは偏在するようになる。その性質が格子の理論でも成立する様子を Kaplan が文献 [19] の論文で示し、そこから domain wall fermion の考え方が生まれた。Neuberger らは Kaplan の考えをさらに押し進め、カイラルフェルミオンを表しうる Dirac 演算子を構成した。

その演算子の形は自由フェルミオンに対して

$$\begin{gathered} D = \tfrac{1}{a}\{1 - A(A^\dagger A)^{-1/2}\}\,, \\ A = 1 - aD_w \end{gathered} \tag{141}$$

というものである。ただし D_w とは Wilson が提案した Dirac 演算子で、具体的には

$$D_w = i\gamma^\mu \frac{\left(\triangle_\mu + \triangle_\mu^*\right)}{2} - \frac{a}{2}\triangle_\mu^*\triangle_\mu \tag{142}$$

である[15]。

Lüscher 対称性:

$$\gamma_5 D + D\gamma_5 = aD\gamma_5 D \tag{140}$$

は 6.2 節で示す Ginsparg-Wilson 関係式 (157) 式の一番単純なものであるが、カイラル対称性 (139) 式に格子間隔に比例する補正項を加えようと思ったらほとんど変更の余地はない形である。格子間隔が長さの次元を持っていて、両辺の次元を合わせようと思えば (140) 式がもっともであることがわかるだろう[16]。

---

[13] 条件に現われている $\tilde{D}(P)$ とは、格子上の Dirac 演算子 D が並進変換の下で不変だとして、

$$De^{ipx}u = \tilde{D}(p)e^{ipx}u$$

に現われる 4×4 行列。(上の式の u は constant Dirac spinor)

[14] 続く論文 [18] でそれが Ginsparg-Wilson 関係式の一つの形を満たしていることが指摘された。

[15] $\triangle_\mu$ や $\triangle_\mu^*$ の定義は 6 ページ参照

[16] なお Lüscher 対称性の代数的な改良については文献 [46][47] などがある

しかしそのもっともな形の補正項をうまく成立させる Dirac 演算子はなかなか見つからなかった。たとえば Wilson の提案した Dirac 演算子 (142) 式だった場合は、

$$\begin{aligned} \gamma_5 D_w + D_w \gamma_5 &= -a \triangle_\mu^* \gamma_5 \triangle_\mu \\ a D_w \gamma_5 D_w &= -\tfrac{a}{4} \left(\triangle_\mu \gamma_5 \triangle_\mu + 2 \triangle_\mu^* \gamma_5 \triangle_\mu + \triangle_\mu^* \gamma_5 \triangle_\mu^* \right) + \tfrac{a^2}{4} \triangle_\mu^* \triangle_\mu \gamma_5 \triangle_\mu^* \triangle_\mu \end{aligned} \tag{143}$$

であり、近い形といえなくもないが、$\gamma_5 D_w + D_w \gamma_5 = a D_w \gamma_5 D_w$ とはなっていない。

ところが (141) 式の Dirac 演算子を用いると、$\gamma_5 D + D \gamma_5 = a D \gamma_5 D$ がちゃんと成立しているのである。具体的にみてみると、

$$\gamma_5 D + D \gamma_5 = \frac{1}{a} \left\{ 2\gamma_5 - A(A^\dagger A)^{-1/2} \gamma_5 - \gamma_5 A (A^\dagger A)^{-1/2} \right\} \tag{144}$$

$$\begin{aligned} a D \gamma_5 D =& \frac{1}{a} \left\{ 1 - A(A^\dagger A)^{-1/2} \right\} \gamma_5 \left\{ 1 - A(A^\dagger A)^{-1/2} \right\} \\ =& \frac{1}{a} \{ \gamma_5 + A(A^\dagger A)^{-1/2} \gamma_5 A (A^\dagger A)^{-1/2} \\ & - A(A^\dagger A)^{-1/2} \gamma_5 - \gamma_5 A (A^\dagger A)^{-1/2} \} \end{aligned} \tag{145}$$

ここで A の定義を思い出すと

$$\begin{aligned} A \gamma_5 &= \gamma_5 A^\dagger \\ A^\dagger A &= A A^\dagger \end{aligned} \tag{146}$$

が成立しているので、$A(A^\dagger A)^{-1/2} \gamma_5 A (A^\dagger A)^{-1/2} = \gamma_5$ であり、

$$a D \gamma_5 D \quad = \quad \frac{1}{a} \left\{ 2\gamma_5 - A(A^\dagger A)^{-1/2} \gamma_5 - \gamma_5 A (A^\dagger A)^{-1/2} \right\} \quad = \quad \gamma_5 D + D \gamma_5$$

となっている。つまり (140) 式が成立しているのである。

なおここでわかる通り、自由フェルミオンに対する Lüscher 対称性の解:

$$D = \frac{1}{a} \{ 1 - A(A^\dagger A)^{-1/2} \} \tag{141}$$

に現われる A は、 $A = 1 - a D_w$ でなくとも (146) 式の性質を満たすものであれば問題はない。

さらにこの Lüscher 対称性の便利なところは、この Dirac 演算子の具体的な形には何ら影響を受けないのである。それらについては 6.3 節以降で論じることにする。

6.2 Ginsparg-Wilson 関係式

前節では格子上でのカイラル対称性の現われ方として、Lüscher 対称性と、その式を満たす解がありうることを取り上げた。この Lüscher 対称性の便利なところを論じる前に、そのきっかけとも言える Ginsparg と Wilson の関係式について振り返っておこう。前節の Lüscher 対称性の (140) 式は、この節で扱う Ginsparg-Wilson 関係式の特殊な場合であ

る。

Ginsparg と Wilson は、カイラル対称性を保つ作用があったとき、そこからブロックスピン変換で移り変われる理論の Dirac 演算子に対して、元々の作用がカイラル不変であることから導かれる制約がなにか付くだろうかということを考えた。文献 [16] の論文である。

まずカイラル不変な作用 $A_I(\phi,\bar{\phi})$ を考える。それが満たすべき性質は、

$$A_I(e^{i\epsilon\gamma_5}\phi,\bar{\phi}e^{i\epsilon\gamma_5}) = A_I(\phi,\bar{\phi}) \tag{147}$$

この作用 $A_I(\phi,\bar{\phi})$ は連続の作用でも構わない。大事なのは (147) 式の性質のみである[17]。

ここでブロックスピン変換後の場を ψ と書くことにして、新しい作用 $A(\psi,\bar{\psi})$ を次のように定義する:

$$e^{-A(\psi,\bar{\psi})} = \int_{\phi\bar{\phi}} \exp\left[-(\bar{\psi}_n-\bar{\phi}_n)\alpha_{nm}(\psi_m-\phi_m) - A_I(\phi,\bar{\phi})\right] \tag{148}$$

スピノールの添字については和を取るものとし、n,m は空間の添字である。また使っているメトリックはユークリッド的とする。

この (148) 式に現われる ϕ_n や $\bar{\phi}_n$ は、元の $A_I(\phi,\bar{\phi})$ の自由度から新たな格子ブロックの各サイトについてなにかしらの決まった方法で構成されたブロック変数である。行列 α は自明でない γ 行列の依存性を持っているが、(148) 式の変換が特異でない fixed point action を認めるためには、カイラル変換で不変ではない部分をもつ必要がある。

以下では最も単純なケースとして行列 α が Dirac 空間において単位行列に比例する場合のみを考えることにする。

ここでやりたいことは、元の $A_I(\phi,\bar{\phi})$ がカイラル不変であることに起因する $A(\psi,\bar{\psi})$ の性質を見付けるということである。そこでこの $A(\psi,\bar{\psi})$ をカイラル変換したものを表してみると、global カイラル変換の下では、

$$\begin{aligned}\exp\left[-A(e^{-i\epsilon\gamma_5}\psi,\bar{\psi}e^{-i\epsilon\gamma_5})\right] &= \textstyle\int_{\phi\bar{\phi}} \exp\left[-(\bar{\psi}_n e^{-i\epsilon\gamma_5}-\bar{\phi}_n)\alpha_{nm}(e^{-i\epsilon\gamma_5}\psi_m-\phi_m) - A_I(\phi,\bar{\phi})\right]\\ &= \textstyle\int_{\phi\bar{\phi}} \exp\left[-(\bar{\psi}_n-\bar{\phi}_n)e^{-i\epsilon\gamma_5}\alpha_{nm}e^{-i\epsilon\gamma_5}(\psi_m-\phi_m) - A_I(\phi,\bar{\phi})\right]\end{aligned} \tag{149}$$

である。

なお上式の 1 行目から 2 行目では $\phi\to e^{-i\epsilon\gamma_5}\phi$, $\bar{\phi}\to\bar{\phi}e^{-i\epsilon\gamma_5}$ の置き換えをし、$A_I(\phi,\bar{\phi})$ に対して (147) 式の性質を利用している。またここではすでに上記の置き換えの下でヤコビアンが 1 であるとしてしまっている。これが気になるならば、右辺にヤコビアンの変化分として δJ などといった項を付け加えておくとよい。ただし、その項は後に (156) 式を導く時点で、$\delta J=0$ だということが判明する。

もし $A_I(\phi,\bar{\phi})$ がフェルミオンの quadratic ならば、$A(\psi,\bar{\psi})$ もそうであって、

$$A(\psi,\bar{\psi}) \equiv \bar{\psi}_n K_{nm}\psi_m \tag{150}$$

と書くことができる。

[17] ここでの ϕ はフェルミオンであってスカラー場とは関係ない。

これを利用して (149) 式の各辺を ϵ の 1 次まで展開する。まず

$$\begin{aligned}-A(e^{-i\epsilon\gamma_5}\psi,\bar{\psi}e^{-i\epsilon\gamma_5}) &= -\bar{\psi}_n e^{-i\epsilon\gamma_5}K_{n,m}e^{-i\epsilon\gamma_5}\psi_m \\ &= -\bar{\psi}_n K_{nm}\psi_m + i\epsilon\bar{\psi}_n\left\{\gamma_5,K_{nm}\right\}\psi_m \quad +\mathcal{O}(\epsilon^2)\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}((149)\text{ 式の左辺}) = \exp\left[-A(e^{-i\epsilon\gamma_5}\psi,\bar{\psi}e^{-i\epsilon\gamma_5})\right] \\ = \quad \exp\left[-A(\psi,\bar{\psi})\right]\exp\left[i\epsilon\bar{\psi}\{\gamma_5,K\}\psi\right] \\ = \quad e^{-A(\psi,\bar{\psi})}\left[1+i\epsilon\bar{\psi}\{\gamma_5,K\}\psi\right] \qquad (151)\end{aligned}$$

同様に右辺は、

$$\begin{aligned}e^{-i\epsilon\gamma_5}\alpha_{nm}e^{-i\epsilon\gamma_5} &= (1-i\epsilon\gamma_5)\alpha_{nm}(1-i\epsilon\gamma_5)+\mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \alpha_{nm} - i\epsilon\left\{\gamma_5,\alpha_{nm}\right\}+\mathcal{O}(\epsilon^2)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) = \int_{\phi\bar{\phi}}\exp\left[-(\bar{\psi}_n-\bar{\phi}_n)e^{-i\epsilon\gamma_5}\alpha_{nm}e^{-i\epsilon\gamma_5}(\psi_m-\phi_m)-A_I(\phi,\bar{\phi})\right] \\ = \quad \int_{\phi\bar{\phi}}\exp\left[-(\bar{\psi}-\bar{\phi})\alpha(\psi-\phi)-A_I(\phi,\bar{\phi})\right]\exp\left[+i\epsilon(\bar{\psi}-\bar{\phi})\{\gamma_5,\alpha\}(\psi-\phi)\right] \\ = \quad \int_{\phi\bar{\phi}}\left[1+i\epsilon(\bar{\psi}-\bar{\phi})\{\gamma_5,\alpha\}(\psi-\phi)\right]\exp\left[-(\bar{\psi}-\bar{\phi})\alpha(\psi-\phi)-A_I(\phi,\bar{\phi})\right] \qquad (152) \\ = \quad \left[1-i\epsilon\frac{\partial}{\partial\psi}\alpha^{-1}\{\gamma_5,\alpha\}\alpha^{-1}\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}}\right]\int_{\phi\bar{\phi}}\exp\left[-(\bar{\psi}-\bar{\phi})\alpha(\psi-\phi)-A_I(\phi,\bar{\phi})\right] \qquad (153) \\ = \quad \left[1-i\epsilon\frac{\partial}{\partial\psi}\{\gamma_5,\alpha^{-1}\}\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}}\right]e^{-A(\psi,\bar{\psi})} \qquad (154)\end{aligned}$$

となる。ここで (152) 式から (153) 式にかけては、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}}e^{-(\bar{\psi}-\bar{\phi})\alpha(\psi-\phi)} &= -\alpha(\psi-\phi)e^{-(\bar{\psi}-\bar{\phi})\alpha(\psi-\phi)} \\ \frac{\partial}{\partial\psi}e^{-(\bar{\psi}-\bar{\phi})\alpha(\psi-\phi)} &= (\bar{\psi}-\bar{\phi})\alpha e^{-(\bar{\psi}-\bar{\phi})\alpha(\psi-\phi)}\end{aligned}$$

といった関係を用いて変形する。ただし、よく注意しなければならないのは、余分に $-i\epsilon\,\mathrm{tr}\,\alpha^{-1}\{\gamma_5,\alpha\}$ という項が存在することであろう。この項が存在することは (153) 式をちゃんと展開して (152) 式に戻るかどうかを確かめてみればわかる:

$$\begin{aligned}-i\epsilon\frac{\partial}{\partial\psi}\alpha^{-1}\{\gamma_5,\alpha\}\alpha^{-1}\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}}\exp\left[-(\bar{\psi}-\bar{\phi})\alpha(\psi-\phi)-A_I(\phi,\bar{\phi})\right] \\ =i\epsilon\frac{\partial}{\partial\psi}\alpha^{-1}\{\gamma_5,\alpha\}(\psi-\phi)\exp\left[-(\bar{\psi}-\bar{\phi})\alpha(\psi-\phi)-A_I(\phi,\bar{\phi})\right] \\ =i\epsilon\left[(\bar{\psi}-\bar{\phi})\{\gamma_5,\alpha\}(\psi-\phi)+\ \mathrm{tr}\,\alpha^{-1}\{\gamma_5,\alpha\}\right]e^{-(\bar{\psi}-\bar{\phi})\alpha(\psi-\phi)-A_I(\phi,\bar{\phi})}\end{aligned}$$

もちろん、いま行っている計算では $\mathrm{tr}\,\gamma_5 = 0$ より、このトレースの項は意味を持たない。ただ、この項は Ginsparg-Wilson 関係式と同様の等式を別の対称性に対して構成しようとした場合には、無視できない場合もある。その例としては、Ginsparg-Wilson 関係式を超対称性に対して構成しようとした試みで、文献 [36],[37] などがあり、6.4 節で紹介する。

カイラル変換に対する Ginsparg-Wilson 関係式の導出を続けよう。(153) 式から (154) 式への変形は、$e^{-A(\psi,\bar{\psi})}$ の定義 (148) 式を思い出せば明らかだろう。

ここで次の式

$$\begin{aligned} K\psi e^{-\bar{\psi}K\psi} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}}e^{-\bar{\psi}K\psi} \\ \bar{\psi}Ke^{-\bar{\psi}K\psi} &= \frac{\partial}{\partial\psi}e^{-\bar{\psi}K\psi} \end{aligned} \tag{155}$$

を用いると、(154) 式はさらに変形することができて、(151) 式と (154) 式を等号で結んで ϵ の 1 次の項に注目すると、

$$i\epsilon\bar{\psi}\{\gamma_5, K\}\psi e^{-\bar{\psi}K\psi} = i\epsilon\bar{\psi}K\{\gamma_5, \alpha^{-1}\}K\psi e^{-\bar{\psi}K\psi} \tag{156}$$

が成立している。つまり、

$$\{\gamma_5, K\} = K\{\gamma_5, \alpha^{-1}\}K$$

であり、α を Dirac 空間においては単位行列としていることを思い出すと、

$$\begin{gathered} \{\gamma_5, K\} = K\{\gamma_5, \alpha^{-1}\}K = 2K\gamma_5\alpha^{-1}K \\ \text{or} \\ \{\gamma_5, D\} = 2D\gamma_5\alpha^{-1}D \end{gathered} \tag{157}$$

となっているのである。

この関係式が、カイラル不変な理論から出発してブロックスピン変換で移り変われる理論の特徴であり、求めたかった式である。元々のカイラル不変な作用 A_I は (147) 式の性質さえ満たしていればよいものであり、つまりは連続理論の作用でも問題はないのである。そのため、連続のカイラル不変な作用とブロックスピン変換で結ばれる理論に対する制約として、(157) 式が得られたことになる。

形を見れば明らかなように、(157) 式において $\alpha^{-1} = \frac{a}{2}$ とすれば、Lüscher 対称性の式 (140) 式が得られる。

$$\gamma_5 D + D\gamma_5 = aD\gamma_5 D \tag{140}$$

6.3 Lüscher fermion の有効性

それではこの Lüscher 対称性を満たすフェルミオンにはどんないいところがあるかについて考えてみよう。しばらくは文献 [20] にならって話を進めることにする。

アノマリーの計算

まずは Lüscher 対称性の (140) 式から出てくるアノマリーを計算してみる。すると通常の Ward 恒等式のアノマリーになっていて、そのことから格子上におけるカイラル対称性の形が、この Lüscher 対称性の式であると解釈するのである。

新しい対称性に関連した場の無限小変化は、

$$\begin{aligned}\delta\psi &= \gamma_5(1-\frac{1}{2}aD)\psi \\ \delta\bar{\psi} &= \bar{\psi}(1-\frac{1}{2}aD)\gamma_5\end{aligned} \tag{158}$$

である。この変換によって、自由フェルミオンの作用:

$$S_F = a^4\sum_x \bar{\psi}D\psi$$

が不変であることは容易に示せる。具体的に代入してみれば一目瞭然で、

$$\begin{aligned}\delta S_F &= a^4\sum_x(\delta\bar{\psi}D\psi + \bar{\psi}D\delta\psi) \\ &= a^4\sum_x\left[\bar{\psi}(1-\frac{1}{2}aD)\gamma_5 D\psi + \bar{\psi}D\gamma_5(1-\frac{1}{2}aD)\psi\right] \\ &= a^4\sum_x\left[\bar{\psi}\gamma_5 D\psi + \bar{\psi}D\gamma_5\psi - \bar{\psi}aD\gamma_5 D\psi\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

である。ここでは D の具体的な形は使っていない。

Lüscher 対称性 (140) 式の無限小変換として、(158) 式とせず、

$$\begin{aligned}\delta\psi &= \gamma_5(1-aD)\psi \\ \delta\bar{\psi} &= \bar{\psi}\gamma_5\end{aligned} \tag{159}$$

のようにすることもできる。これでももちろん、上の S_F を不変に保つことができる。しかしこの式では、$(\delta\psi)^\dagger\gamma^0$ が $\delta\bar{\psi}$ になっていない。無限小変換として (158) 式の形を選ぶのは $\delta\bar{\psi} = (\delta\psi)^\dagger\gamma^0$ を期待するからであり、このことを要求しないならば、(159) 式のようにしても問題はない。(以下の議論も問題なく適用できる)

ここで興味があるのは期待値:

$$\langle\mathcal{O}\rangle_F = \int\prod_x d\psi(x)d\bar{\psi}(x)\mathcal{O}e^{-S_F} \tag{160}$$

の対称性に関する性質である。ただし $\mathcal{O}$ はフェルミオン場の任意の積である。

$\psi, \bar{\psi}$ の変換を

$$\begin{aligned}\psi &\to \psi + \epsilon\delta\psi\,, \\ \bar{\psi} &\to \bar{\psi} + \epsilon\delta\bar{\psi}\end{aligned} \tag{161}$$

と表して、ϵ の 1 次までを取る。関係式:

$$\log(\det X) = \operatorname{tr}(\log X)$$

に注意して積分測度の変化を計算すれば、(158) 式にしても (159) 式にしても

$$\begin{aligned}\det(1+\epsilon\gamma_5 - a\epsilon\gamma_5 D) &= \exp\big[\operatorname{tr}\big\{\log(1+\epsilon\gamma_5 - a\epsilon\gamma_5 D)\big\}\big] \\ &= \exp\big[\epsilon\operatorname{tr}\big\{\gamma_5 - a\gamma_5 D\big\}\big] \\ &= \exp\big[-a\epsilon\operatorname{tr}\big\{\gamma_5 D\big\}\big] \\ &= -a\epsilon\operatorname{tr}\big(\gamma_5 D\big)\end{aligned}$$

など[18]より、

$$\langle\delta\mathcal{O}\rangle_F = -a\operatorname{tr}(\gamma_5 D)\langle\mathcal{O}\rangle_F \tag{162}$$

となる。ここでの最後のトレースはフェルミ場の空間でのトレース。

先に考えた自由フェルミオンの D :(141) 式の場合は tr が消えて、対称性は exact である。

ここで次の式に着目する。

$$a(z-D)\gamma_5(z-D) = z(2-az)\gamma_5 - (1-az)\{(z-D)\gamma_5 + \gamma_5(z-D)\}$$

この式は Ginsperg-Wilson 関係式が成立する場合に成立する。この式の右から $(z-D)^{-1}$ を掛けて tr をとると、$\operatorname{tr}\gamma_5 = 0$ に注意しつつ、

$$-a\operatorname{tr}(D\gamma_5) = z(2-az)\operatorname{tr}\{\gamma_5(z-D)^{-1}\} - (1-az)\operatorname{tr}\{(z-D)\gamma_5(z-D)^{-1}\}$$

tr の性質から $\operatorname{tr}\{(z-D)\gamma_5(z-D)^{-1}\} = \operatorname{tr}\{(z-D)^{-1}(z-D)\gamma_5\} = 0$

よって、

$$-a\operatorname{tr}(D\gamma_5) = z(2-az)\operatorname{tr}\{\gamma_5(z-D)^{-1}\} \tag{163}$$

この式の両辺を $z(2-az)$ で割って、原点まわりの小さな円周で積分する。

$$\oint\frac{dz}{2\pi i}\frac{-a}{z(2-az)}\operatorname{tr}(D\gamma_5) = \oint\frac{dz}{2\pi i}\operatorname{tr}\{\gamma_5(z-D)^{-1}\}$$

より左辺を計算して、

$$-\frac{a}{2}\operatorname{tr}(D\gamma_5) = \oint\frac{dz}{2\pi i}\operatorname{tr}\{\gamma_5(z-D)^{-1}\}$$

D の 0 モードの部分空間への射影演算子 P_0 を

$$P_0 = \oint\frac{dz}{2\pi i}(z-D)^{-1}$$

と表記すると、

$$-a\operatorname{tr}(D\gamma_5) = 2\operatorname{tr}(\gamma_5 P_0) \tag{164}$$

[18]ここの途中計算は (158) 式か (159) 式かによって異なるが、結果である (162) 式は共通である。

となっている。

P_0 は D の 0 モードを与える演算子で、γ_5 はその 0 モードに対して、右巻きと左巻きに応じて $+1$ か -1 を対応させる演算子だと考えることができる。そのため $\mathrm{tr}\,(\gamma_5 P_0)$ は、D に含まれる右巻き粒子数と左巻き粒子数の差を与える。

フェルミオンのフレイバー数についても考慮に入れると (164) 式より、

$$-a\,\mathrm{tr}\,(D\gamma_5) = 2N_f \times \mathrm{index}(D) \tag{165}$$

(N_f はフェルミオンのフレイバー数)

である。

この式と $\langle \delta\mathcal{O}\rangle_F = -a\,\mathrm{tr}\,\{\gamma_5 D\}\langle\mathcal{O}\rangle_F$ を合わせると、Ward 恒等式のアノマリーになっている。

$$\langle \delta\mathcal{O}\rangle_F = 2N_f \times \mathrm{index}(D) \times \langle\mathcal{O}\rangle_F$$

このことから、Lüscher は (140) 式を格子における厳密なカイラル対称性の式であると主張したのである。

カイラル不変性を保つ Yukawa 相互作用の構成

この Lüscher 対称性の有効性の大事な点として、相互作用を含む理論が作りやすいという点を忘れることはできない。ここでは相互作用としてフェルミオンとスカラー場の結合を考える。

方針は単純で、ψ だけではカイラル不変とならないが、うまく補助場 χ を導入して、$\psi + \chi$ の組み合せで通常のカイラル不変性のようにするのである。

まず自由フェルミオンの作用から話を始める。自由フェルミオンの作用として、

$$S_F = a^4 \sum_x \{\bar\psi D\psi - (2/a)\bar\chi\chi\} \tag{166}$$

を考える。ここで現われた $\bar\chi, \chi$ が補助場であり、変換性はそれぞれ

$$\begin{aligned} \delta\psi &= \gamma_5(1 - \frac{1}{2}aD)\psi + \gamma_5\chi \\ \delta\bar\psi &= \bar\psi(1 - \frac{1}{2}aD)\gamma_5 + \bar\chi\gamma_5 \end{aligned} \tag{167}$$

$$\begin{aligned} \delta\chi &= \gamma_5\frac{1}{2}aD\psi \\ \delta\bar\chi &= \bar\psi\frac{1}{2}aD\gamma_5 \end{aligned} \tag{168}$$

であるとする。なおこの変換の下で、上の (166) 式の S_F は不変になっている。具体的に代入すれば明らかで、

$$\begin{aligned} \delta S_F &= a^4 \sum_x \{\delta\bar\psi D\psi + \bar\psi D\delta\psi - (2/a)\delta\bar\chi\chi - (2/a)\bar\chi\delta\chi\} \\ &= a^4 \sum_x \{\delta\bar\psi D\psi + \bar\psi D\delta\psi - \bar\psi D\gamma_5\chi - \bar\chi\gamma_5 D\psi\} \\ &= a^4 \sum_x \left\{\bar\psi(1 - \frac{1}{2}aD)\gamma_5 D\psi + \bar\psi D\gamma_5(1 - \frac{1}{2}aD)\psi\right\} = 0 \end{aligned}$$

これらを使ってカイラル不変性を保った相互作用項をつくる。

これら (167) 式と (168) 式を組み合わせれば、

$$\begin{aligned}\delta(\psi+\chi) &= \gamma_5(\psi+\chi)\\ \delta(\bar{\psi}+\bar{\chi}) &= (\bar{\psi}+\bar{\chi})\gamma_5\end{aligned} \tag{169}$$

となっているのがわかるだろう。つまり、$\psi+\chi$ という組み合わせは、通常の意味でのカイラル不変性を持つということである。

そのことを利用すると、格子上の複素スカラー場を ϕ と表記して、カイラル不変な Yukawa 相互作用項は、

$$S_{\text{int}} = a^4 \sum_x g_0(\bar{\psi}+\bar{\chi}) \left\{ \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\phi + \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\phi^* \right\} (\psi+\chi) \tag{170}$$

とすることができる。

以上で格子上でカイラル不変な相互作用項をつくることができた。

このやり方で大事なところは、$\psi+\chi$ の組み合わせで通常のカイラル不変になるように、補助場を導入するということである。ここの説明でははじめに (166) 式を導入し、同時に (167) 式と (168) 式を導入したが、考え方の順序としてはむしろ逆である。つまり、(169) 式を満たすように変換性 (167) 式と (168) 式を導入し、その変換の下で不変になるように、作用 S_F を構成する... という手順である。

Lüscher fermion におけるダブラーについて

Lüscher fermion ではダブラーをどう扱っているのだろうか。そのことを少し考えてみよう。

具体的に (141) 式の Dirac 演算子のフーリエ変換を考えてみよう。

$$D = \frac{1}{a}\{1 - A(A^\dagger A)^{-1/2}\}, \;\; A = 1 - aD_w \tag{141}$$

であったので、$\tilde{p}_\mu = \frac{1}{a}\sin ap_\mu$ と $\hat{p}_\mu = \frac{2}{a}\sin\frac{ap_\mu}{2}$ という表記法を用いて

$$a\tilde{D}(p) = 1 - \left\{ 1 - \frac{1}{2}a^2\hat{p}_\mu^2 - ia\gamma_\mu\tilde{p}_\mu \right\} \left\{ 1 + a^2\hat{p}_\mu^2 - \tilde{p}_\mu\tilde{p}_\nu + \frac{a^4}{4}\hat{p}_\mu^2\hat{p}_\nu^2 \right\}^{-1/2} \tag{171}$$

と書ける。これはもちろん $a \to 0$ で $D \to i\gamma_\mu p_\mu$ を実現している。

そして $p_\mu = 0$ の場合には $\tilde{p}_\mu = 0$ かつ $\hat{p}_\mu = 0$ であり、$\tilde{D}(p) = 0$ と粒子を表しているのに対して、ダブラーになりうる $p_\mu = \pm\pi/a$ に対しては $\tilde{p}_\mu = 0$ でも $\hat{p}_\mu \neq 0$ より補正が加わって $\tilde{D}(p) \neq 0$ と粒子ではなくなっている。

つまり基本的には Lüscher fermion でもダブラーに質量を与えるような補正項を用いて、ダブラーを粒子ではないようにしている。ただその補正項の入れ方が、Wilson fermion などとは違っていて、Dirac 演算子が特定の関係式 (つまり Lüscher 対称性の式) を満たすようにしているのである。

そのようにLüscher fermionが単に特殊な質量項の入れ方をしただけだとすると、Wilson fermionと比較してなにが優れているのだろうか。少なくとも実際に数値シミュレーションをしようと思えば、このやり方のDirac演算子の形はWilson fermionの場合よりも複雑である。Wilson fermionの式で計算することに致命的な問題があるわけでもない。

それでもなおLüscher fermionが注目を集めた理由は、これが$\gamma_5 D + D\gamma_5 = aD\gamma_5 D$の関係式を満たすということに尽きる。

この関係式を満たすDに対しては、この小節のはじめに述べたようにアノマリーが正しく求められることや相互作用を含む理論が構成しやすいという利点が得られる。またGinsparg-Wilson関係式は6.2節でも見た通り、カイラル不変な連続理論から出発してブロックスピン変換で移行できる理論のDirac演算子に対して成立する関係である。ブロックスピン変換は繰り込み群を考えたり、数値計算で連続極限を考えたりするときに重要な変換である。そのためGinsparg-Wilson関係式を満たしているDirac演算子の方が、より性質がいいものだといえるだろう。

格子上でフェルミオンを考える際、カイラル対称性を実現するのは難しい。Dirac演算子の方を“もっともらしく”考えると、カイラル対称性は壊れてしまう。そこでどうせ壊れる対称性ならばせめて都合がいいような壊れ方をさせたいものであり、その都合のいい壊れ方としてLüscher対称性があるのだと考えることができる。この壊し方ならば少なくともブロックスピン変換を続けることで確実にカイラル不変な連続理論に行き着くことが保証されている。

6.4 超対称性への拡張例: 超対称性での Ginsparg-Wilson 関係式

カイラル対称性を格子上で表そうとしたときの補正項ともいうべきものが、Lüscher対称性の式から得られた。ではそれと同様の考え方を超対称性に対して適用したらどうだろうか。超対称性を格子で表す際の補正項が得られるのではないか。

6.2節でも少し指摘したが、超対称性に対してGinsparg-Wilson関係式に相当するものを導出することは可能である。超対称不変な理論から出発してブロックスピン変換で行きつくことができる理論を考え、その運動項に成り立つ関係式を求めてみよう。ここでは計算として重複する部分も多いが、改めてGinsparg-Wilson関係式の超対称性版というべきものを導出してみる。なおこのやり方は文献[36]の論文に依るものである。

まず超対称変換を定めておかねばならないが、それは2つのchiral-multiplet $\Phi_j = (\phi_j, \psi_j, F_j)^T$, $j = 1, 2$に対して、連続理論で

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \Phi_j &= Q(\epsilon, \bar{\epsilon})\Phi_j \\ \delta_\epsilon \bar{\Phi}_j &= \bar{\Phi}_j \bar{Q}(\epsilon, \bar{\epsilon}) \end{aligned} \tag{172}$$

と定義されるとする。なお時空はユークリッド的とする。

連続の理論から出発し、格子の理論へブロックスピン変換を行うことを考える。その

ブロックスピン変換はブロックスピン関数 $f_n(x) = f(x-n)$ を用いて、

$$\begin{aligned} \Phi_j &\sim \int dx f_n(x)\Phi(x) \ \equiv \ \langle f_n, \Phi\rangle \\ \bar{\Phi}_j &\sim \int dx f_n(x)\bar{\Phi}(x) \ \equiv \ \langle f_n, \bar{\Phi}\rangle \end{aligned} \tag{173}$$

と表される。この連続の chiral-multiplets による作用を $A_I(\Phi, \bar{\Phi})$ と表記し、この作用は超対称性のもとで不変であるとする。格子上の chiral-multiplets を Ψ_n、それによる作用を $A(\Psi_n, \bar{\Psi}_n)$ と表記して、

$$e^{-A(\Psi,\bar{\Psi})} = \int_{\Phi\bar{\Phi}} \exp\left[-(\bar{\Psi}_n - \bar{\Phi}_n)\alpha_{nm}(\Psi_m - \Phi_m) - A_I(\Phi, \bar{\Phi})\right] \tag{174}$$

である。ここで α_{nm} は multiplet Ψ_n にかかる行列で、

$$\alpha_{nm} = \alpha\delta_{nm}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & V & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{175}$$

と単純化しておく。

格子上でのナイーブな超対称性として、連続の理論から

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon^N \Phi_n &= \int dx f_n(x)\delta\Phi(x) \\ &= Q_L(\overrightarrow{\nabla})\Phi_n \end{aligned} \tag{176}$$

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon^N \bar{\Phi}_n &= \int dx f_n(x)\delta\bar{\Phi}(x) \\ &= \bar{\Phi}_n\bar{Q}_L(\overleftarrow{\nabla}) \end{aligned} \tag{177}$$

と構成する。この変換の下で先の (174) 式がどのように変化するかに注目する。

$$\begin{aligned} e^{-A(\Psi',\bar{\Psi}')} &= \int_{\Phi\bar{\Phi}} \exp\left[-(\bar{\Psi}' - \bar{\Phi})\alpha(\Psi' - \Phi) - A_I(\Phi, \bar{\Phi})\right] \\ &= \int_{\Phi'\bar{\Phi}'} \exp\left[-(\bar{\Psi} - \bar{\Phi})e^{\bar{Q}_L}\alpha e^{Q_L}(\Psi - \Phi) - A_I(\Phi, \bar{\Phi})\right] \end{aligned} \tag{178}$$

であるが、ここで $A(\Psi.\bar{\Psi})$ が

$$A(\Psi, \bar{\Psi}) = \sum_{n,m} \bar{\Psi}_n S_{(n,m)} \Psi_m \tag{179}$$

となっていると期待する。すると、

$$\begin{aligned} ((178)\text{ 式の左辺}) &= e^{-A(\Psi',\bar{\Psi}')} \\ &= \exp\left[-\sum \bar{\Psi}' S_{(n,m)}\Psi'\right] \\ &= \exp\left[-A(\Psi, \bar{\Psi}) - (\delta\bar{\Psi})S\Psi - \bar{\Psi}S(\delta\Psi)\right] \\ &= \exp\left[-A(\Psi, \bar{\Psi})\right]\exp\left[-\bar{\Psi}(\bar{Q}_L S + SQ_L)\Psi\right] \\ &= \exp\left[-A(\Psi, \bar{\Psi})\right]\left(1 - \bar{\Psi}(\bar{Q}_L S + SQ_L)\Psi\right) \end{aligned} \tag{180}$$

であり、

$$
\begin{aligned}
((178)\text{式の右辺}) = \int_{\Phi'\bar{\Phi}'} \exp\left[-(\bar{\Psi}-\bar{\Phi})e^{\bar{Q}_L}\alpha e^{Q_L}(\Psi-\Phi) - A_I(\Phi,\bar{\Phi})\right] \\
= \left\{1 + \delta J - \ \mathrm{str}\,\alpha^{-1}(\alpha Q_L + \bar{Q}_L\alpha)\alpha^{-1}S + \ \mathrm{str}\,\alpha^{-1}(\alpha Q_L + \bar{Q}_L\alpha)\right. \\
\left. -\bar{\Psi}S\alpha^{-1}(\alpha Q_L + \bar{Q}_L\alpha)\alpha^{-1}S\Psi\right\} \exp\left[-A(\Psi,\bar{\Psi})\right]
\end{aligned}
\tag{181}
$$

ここに現われる δJ は、経路積分の測度の変化に関するヤコビアンから出る項である。また str は super trace の略で、フェルミオンの成分には -1、ボゾンには $+1$ を掛けて対角成分の和をとるものとする。

さて上記 2 式、(180)(181) 式を比較することで、次の式を得る。

$$
\delta J = \ \mathrm{str}\,\alpha^{-1}(\alpha Q_L + \bar{Q}_L\alpha)\alpha^{-1}S - \ \mathrm{str}\,\alpha^{-1}(\alpha Q_L + \bar{Q}_L\alpha) \tag{182}
$$

$$
\bar{\Psi}(\bar{Q}_L S + S Q_L)\Psi = -\bar{\Psi}S\alpha^{-1}(\alpha Q_L + \bar{Q}_L\alpha)\alpha^{-1}S\Psi \tag{183}
$$

これらが超対称性に拡張した Ginsparg-Wilson 関係式である。

カイラル対称性に対して Lüscher がしたように、先のナイーブな格子上の超対称性を拡張することができる。それは先の $Q_L, \bar{Q}_L$ の代わりに

$$
\begin{aligned}
q &\equiv Q_L - Q_L\alpha^{-1}S \\
\bar{q} &\equiv \bar{Q}_L - S\alpha^{-1}\bar{Q}_L
\end{aligned}
\tag{184}
$$

と修正された charge を用いることである。このようにすれば、(178) 式の作用が不変であることはわかるだろう。

2 次元 chiral multiplet への例

(182) 式と (183) 式の関係式を具体的に 2 次元の chiral multiplet に当てはめるとどうなるかみてみよう。ここでの記述は文献 [36] ではなく文献 [37] の方に倣うことにする。

文献 [36] と文献 [37] の違いは、考える 2 つの chiral-multiplet の記述の仕方である。文献 [36] では先に考えていたように $\Phi = (\phi, \psi, F)^T$ という順序で記述しているのだが、文献 [37] では $\Phi = (\phi, F; \psi)^T$ のように記述する。この方がいくらか見やすい結果が得られるのである。

さて 2 つの chiral-multiplet Φ_j , $j = 1, 2$ を考える。ここで成分が複素数だとして、1 つにまとめて表してしまうことにする。つまり、

$$
\begin{aligned}
\Phi &= (\phi_1 + i\phi_2, F_1 + iF_2; \chi_1 + i\chi_2, \chi_1^* + i\chi_2^*)^T \\
&\equiv (\phi, F; \chi, \bar{\chi})^T, \\
\bar{\Phi} &= (\phi_1^* - \phi_2^*, F_1^* - iF_2^*; \chi_1 - i\chi_2, \chi_1^* - i\chi_2^*) \\
&\equiv (\phi^*, F^*; \bar{\chi}^\dagger, \chi^\dagger)
\end{aligned}
\tag{185}
$$

と表記する。$N=1$ の超対称変換の定義は、

$$\begin{cases} \delta_\epsilon \phi = i(\epsilon^* \chi + \epsilon \bar{\chi}) \\ \delta_\epsilon F = -2\epsilon \partial_{\bar{z}} \chi + 2\epsilon^* \partial_z \bar{\chi} \\ \delta_\epsilon \chi = -2\epsilon^* \partial_z \phi + i\epsilon F \\ \delta_\epsilon \bar{\chi} = -2\epsilon \partial_{\bar{z}} \phi - i\epsilon^* F \end{cases} \tag{186}$$

とする。超対称不変な質量のないラグランジアンを

$$\mathcal{L} = 2\partial_{\bar{Z}} \phi^* \partial_z \phi - \frac{1}{2} F^* F + i(\chi^\dagger \partial_z \bar{\chi} + \bar{\chi}^\dagger \partial_{\bar{z}} \chi) \tag{187}$$

質量項を

$$\mathcal{L}_m = -\frac{m}{2}(F^* \phi + F \phi^* + \chi^\dagger \chi - \bar{\chi}^\dagger \bar{\chi}) \tag{188}$$

とすると、(175) 式に現われる V は

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{189}$$

である。

ナイーブな超対称性を考えると、(186) 式から

$$Q_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\epsilon^* & i\epsilon \\ 0 & 0 & -2\epsilon \nabla_{\bar{z}} & 2\epsilon^* \nabla_z \\ -2\epsilon^* \nabla_z & i\epsilon & 0 & 0 \\ -2\epsilon \nabla_{\bar{z}} & -i\epsilon^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{190}$$

$$\bar{Q}_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\epsilon^* \overleftarrow{\nabla}_z & -2\epsilon \overleftarrow{\nabla}_{\bar{z}} \\ 0 & 0 & i\epsilon & -i\epsilon^* \\ i\epsilon^* & 2\epsilon \overleftarrow{\nabla}_{\bar{z}} & 0 & 0 \\ -i\epsilon & -2\epsilon^* \overleftarrow{\nabla}_z & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{191}$$

が得られる。

この 2 式から $\alpha Q_L + \bar{Q}_L \alpha$ を計算すると、

$$\alpha Q_L + \bar{Q}_L \alpha = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\epsilon (TD)_{\bar{z}} & 2\epsilon^* (TD)_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\epsilon (TD)_{\bar{z}} & 0 & 0 & 0 \\ -2\epsilon^* (TD)_{\bar{z}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{192}$$

となる。ただし、$(TD)_z = \overrightarrow{\nabla}_z + \overleftarrow{\nabla}_z$ 。

超対称性に拡張した Ginsparg-Wilson 関係式を求めるために、格子上の作用を

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n,m} \bar{\Psi}_n S_{(n,m)} \Psi_m \\ S &= \begin{pmatrix} D_B & 0 \\ 0 & D_F \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{193}$$

と考える。D_B はボゾンに対する運動項で D_F はフェルミオンに対する運動項である。(183) 式より得られる式は、

$$\sigma_3 D_F + D_F \sigma_3 = \alpha^{-1} D_F \sigma_3 D_F \tag{194}$$

$$\Sigma_3 D_B + D_B \Sigma_3 = \alpha^{-1} D_B \Sigma_3 D_B \tag{195}$$

$$-2D_B^{F^*F} \overrightarrow{\nabla}_{\bar{z}} + iD_F^{\bar{\chi}^\dagger \chi} = \alpha^{-1} D_B^{F^*F} (TD)_{\bar{z}} D_F^{\chi^\dagger \chi} \tag{196}$$

$$iD_B^{\phi^*\phi} - 2\overleftarrow{\nabla}_z D_F^{\bar{\chi}^\dagger \chi} = \alpha^{-1} D_B^{\phi^* F} (TD)_z D_F^{\chi^\dagger \chi} \tag{197}$$

である。ただし $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で、さらに $D_F^{\chi^\dagger \chi}$ などは D_F の $\chi^\dagger \chi$ 成分などを表している。

(194) 式はフェルミオンに対する元々の Ginsparg-Wilson の関係式で、(195) 式はボゾンに対する Ginsparg-Wilson 関係式に対応するものである。超対称性によってボゾンにもダブラー問題は発生するので、この式はそのダブラーの処理に役立つものであろう。そして (196) 式と (197) 式はフェルミオンとボゾンの間の関係を示すものになっている。

7　総論

Wilson fermion, staggerd fermion, Lüscher fermion という格子上でフェルミオンを表現する 3 種類の方法を確認してきた。連続極限で Weyl fermion を表す格子上のフェルミオンを構成すると、ダブラーは必ず現われる。3 種類の方法はそれぞれのやり方でダブラーの発生を回避していた。5.3 節で述べた任意 d 次元の staggerd fermion の場合は、フェルミ場で表現すると Wilson fermion とそっくりの質量項が導入されている。Lüscher fermion も概ね Wilson fermion と同じ様な質量項を入れていると考えられるので、これら 3 種類の方法の間の違いは、ダブラーに対する質量項の入れ方の違いだといえるだろう。

Wilson fermion では最も単純にダブラーに質量を与える項が導入されている。一番単純な考え方なので、数値計算を行う上ではとても便利で現時点でも Wilson fermion に基づく計算は多く試みられている。ただしこれは完全にカイラル対称性を壊すような形になっている。

Staggerd fermion では Wilson fermion とは少し違った入れ方をしていた。本論文で紹介した任意 d 次元の staggerd fermion に関しては、新たに導入されたフレイバーの自由度に関するカイラル対称性のようなものを保持するような形で、質量項が導入されていた。

なお本論文中で述べた staggerd fermion の構成法は、あくまで 1 つのやり方に過ぎない。他の方法で自由度の分配を行ったならば 5.4 節で見た質量項の現われ方は違ったものになるだろう。本論文中で述べた構成法の利点は、連続極限で Dirac-Kähler fermion に行きつくという点である。その対応とは 5.4 節で行ったように空間を単位格子とサイズ $2a$ の格子点に分解し、単位格子の座標 ρ_μ がすべて 0 なら 0 形式、ρ_μ のうち 1 つが 1 なら 1 形式、2 つが 1 なら 2 形式... というように対応づけるのである。幾何学的な意味合いはそれでよく見て取れるだろう。この staggerd fermion では空間が離散的であることから付く “質量項” の存在が Dirac-Kähler fermion との違いであるといえる。

Lüscher fermion は最も新しい流れであるだけに、それだけ説得力の強い質量項の入れ方をしている。6 節で見たとおり、このフェルミオンはカイラル不変な連続理論からブロックスピン変換で移り変われるものだというのが特徴である。つまりブロックスピン変換で連続理論と結び付くような形で、ダブラーの質量項が導入されている。Lüscher fermion を用いた数値計算も最近は行われるようになっており、Dirac 演算子の形が複雑であることから収束性は Wilson fermion などより悪くなっているものの、およそ期待通りの結果が出ているようである。

また Lüscher 対称性の式を満たすフェルミオンならば同様の性質を持っているので、6.1 節で挙げた形以外の Dirac 演算子でも Lüscher fermion が記述される可能性はある。そういった関心からの研究や、Lüscher 対称性の式をより一般の形で考えたらどうなるかといった観点の研究なども行われている。

格子を用いた超対称不変性は、現在さまざまな方法が試みられている状況で、本論文中では十分に取り扱いきれていない。格子で超対称変換を扱おうとした際に現われる困難というのは、概ね次の 3 つが挙げられるかと思う。

- 超対称変換の定義に微分が含まれているため、それを差分に置き換えるときの任意性が存在していること

- フェルミオンのダブラーからスカラー場にもダブラーが発生すること
- 微分が差分に置き換わるためにライプニッツ則が成立しないこと

2 つ目と 3 つ目について少し確認しておこう。

スカラー場にもダブラーが発生することについてだが、理論の自由エネルギーに注目する。まずフェルミオンの運動項を

$$S_f = \sum_x \bar{\psi} \frac{1}{2} \gamma^\mu (\triangle_\mu^* + \triangle_\mu) \psi \tag{198}$$

とする。これから得られるフェルミオンの自由エネルギーは

$$F_f = -\ln \left[\prod_p \sin^2 p_\mu \right] \tag{199}$$

となる。これに対してスカラー場の運動項を通常のように考えると

$$S_b = -\sum_x \phi^\dagger \triangle_\mu^* \triangle_\mu \phi \tag{200}$$

とするので、ここから得られる自由エネルギーは

$$F_b = \ln \left[\prod_p 4 \sin^2 \frac{p_\mu}{2} \right] \tag{201}$$

であり、先のフェルミオンの自由エネルギーとうまく打ち消し合わない。フェルミオンの自由エネルギーとうまく打ち消し合うような自由エネルギーを得るためには、スカラー場の作用を

$$S_b' = -\sum_x \phi^\dagger \left\{ \frac{1}{2} (\triangle_\mu^* + \triangle_\mu) \right\}^2 \phi \tag{202}$$

とする必要がある。このようにして計算すると、

$$F_b' = \ln \left[\prod_p \sin^2 p_\mu \right] \tag{203}$$

である。これならば丁度フェルミオンの自由エネルギーを打ち消すことができる。ごく簡単な議論だが、フェルミオンのダブラーにつられる形でスカラー場にもダブラーが発生することがわかるだろう。

ライプニッツ則が成立しないことはより根本的な問題であろう。これは微分から差分に置き換えた結果として避けることができない。超対称性がある理論を考える場合でも作用の中の表面項を 0 とするが、これが離散的な理論ではうまくいかないのである。これは具体的に見てみるとわかりやすい。仮に 1 次元でサイト数 3 つという場合を考えてみよう。考えるのは A, B, C を関数として、$\sum_x \partial^* A \cdot B \cdot C + A \cdot \partial^* B \cdot C + A \cdot B \cdot \partial^* C$

が A, B, C の境界値が 0 のときにちゃんと消えるかどうかである。1 次元でサイト数 3 つとしているので完全に書き下すことにすると、

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=1,2,3} \partial^* A \cdot B \cdot C + A \cdot \partial^* B \cdot C + A \cdot B \cdot \partial^* C \\
&\qquad = \frac{1}{2}\Big\{(A_2 - A_0)B_1C_1 + (A_3 - A_1)B_2C_2 + (A_4 - A_2)B_3C_3 \\
&\qquad\quad + A_1(B_2 - B_0)C_1 + A_2(B_3 - B_1)C_2 + A_3(B_4 - B_2)C_1 \\
&\qquad\quad + A_1B_1(C_2 - C_0) + A_2B_2(C_3 - C_1) + A_3B_3(C_4 - C_2)\Big\} \\
&\qquad \neq 0
\end{aligned} \tag{204}$$

和を取った結果に、境界の値だけでなく中間の値も残ってしまっている。

なおこのライプニッツ則だが、3 つの関数の積 ABC については今みた通りだが、2 つの関数の積に関してならば、差分でも通常の微分と同じように成り立っていることもわかる。同じように 1 次元 3 サイトで考えると、

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=1,2,3} \partial^* A \cdot B + A \cdot \partial^* B \\
&\qquad = \frac{1}{2}\Big\{(A_2 - A_0)B_1 + (A_3 - A_1)B_2 + (A_4 - A_2)B_3 \\
&\qquad\quad + A_1(B_2 - B_0) + A_2(B_3 - B_1) + A_3(B_4 - B_2)\Big\} \\
&\qquad = \frac{1}{2}\Big\{-A_0B_1 + A_4B_3 - A_1B_0 + A_3B_4\Big\} \qquad = 0
\end{aligned} \tag{205}$$

このように中間の状態はうまく打ち消し合う。ただ残念ながら、超対称性を持つ理論を考える場合に 3 つの関数の積は 2 つの関数の積と同じように登場するのである。

これらの困難は未だ解決されていない問題である。超対称性への拡張にしろ格子上でフェルミオンを表現することにしろ、これらはまだまだ議論の余地がある分野だといえる。

A　補足：発表会用に用意した投射原稿と発表内容

OHP の原稿と発表内容について記しておく。文字の位置などは多少変更されている。またカラーペンで書き足した内容は含まれていない。四角で囲まれた部分が投射した内容で、その次に書かれているのが口頭発表のおよその内容である。口頭の内容にやや不正確な表現も含まれていることは御容赦願いたい。

また東工大での発表会には素粒子理論もしくは原子核理論、宇宙理論を専門とする院生以上の人しか出席しないため、本当に基礎的な導入は省略してある。

発表時間　20 分
質疑応答　 5 分

A.1　発表内容

修士論文発表会：

「格子理論におけるフェルミ粒子の
表し方」

東京工業大学大学院理工学研究科
修士課程 基礎物理学専攻
山本明

(2002 年 2 月 14 日)

「格子理論におけるフェルミ粒子の表し方」というタイトルで発表させて頂きます。

この論文では、カイラルフェルミオンを格子で表そうとするときに現われるダブラー問題という困難な状況を回避しようとするいくつかのやり方のレビューしています。このことを通して学んだことを、別のフェルミオンの理論を格子化したり、重力も含む格子理論を構成しようとするときに、役立てようと考えています。

またカイラルフェルミオンを格子に乗せるときの困難な状況として、ダブラー問題の他に、超対称性のある理論を格子に乗せるという問題もあります。そこで、その超対称性を格子で表すということにも注意を向けています。

場の理論を格子化するときの問題点

⇒ フェルミオンのダブラー問題

ダブラー問題とは...

フェルミオンを単純に格子に乗せると、通常の (連続の) 理論には存在しない粒子が現われること

→ 標準模型が格子に乗せられない

⇓

ダブラー回避の試み

- Wilson fermion
- Staggerd fermion
- Lüscher fermion
- ... etc.

素粒子理論は場の量子論で記述されていますが、場の量子論は通常、摂動計算を行うために強結合領域では計算できないという弱点があります。クォークの結合は通常の温度では強いですし、強結合領域で計算できないのでは困ります。そこで強い結合領域でも計算できるようにしようという目的で格子理論は考案されました。

強結合領域で計算しようという目的では、格子理論はうまくいったのですが、フェルミオンを単純に格子に乗せようとすると、ダブラー問題と呼ばれる困難な状況に行き着きます。

ダブラー問題というのは、フェルミオンを単純に格子に乗せようとすると、格子化する前の理論には存在しない粒子までもが、格子化した理論には存在してしまうという問題です。このことは、標準模型 $(\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1))$ が格子に乗せられないということを意味します[19]。

標準模型が格子に乗せられないというのは困りますので、このダブラー問題を回避し

[19] このことを詳しく説明する OHP 原稿あり。「使わなかったシート」の小節を参照。

ようという試みはいくつもなされています。この論文ではそのうち有名な 3 つの方法について紹介しています。

ダブラーについて　　(単純に格子化した場合)

$$S_f = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial^*_\mu)\psi(x)$$

$$\partial^*_\mu = \frac{1}{2}(\triangle_\mu + \triangle^*_\mu)$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma^\mu\{(1/a)\sin ap_\mu\}}{\{(1/a)\sin ap_\mu\}^2} e^{ip(x-y)}$$

Nielsen-Ninomiya 定理 (no-go 定理)

- 「相互作用が局所的」
- 「格子が並進変換の下で不変」
- 「ハミルトニアンがエルミート」

の条件下でダブラーは避けられない

ダブラー問題についてもう少し具体的に見てみたいと思います。以下の話ではすべてカイラルフェルミオンについて考えることにし、はじめから質量は 0 であるとします。

連続の理論 ($S = \int d^4x \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi$) を単純に格子化すると、このようになります。ここで三角印 ($\triangle$) などと表記しているのは、

$$\triangle_\mu f(x) = \frac{1}{a}\{f(x + a\hat{\mu}) - f(x)\}$$
$$\triangle^*_\mu f(x) = \frac{1}{a}\{f(x) - f(x - a\hat{\mu})\}$$

です。つまりどちらも隣り合う格子サイトとの差をとるのですが、片方は前方差分で他方は後方差分を表しています。a と書いてあるのは格子サイズで、これらを連続極限:格子サイズ a を 0 に近付けるという極限をとった場合には、元の連続の理論に戻ります。そこで、これは格子化できているといえます。

このような格子理論での作用を用いて、フェルミオンの伝播関数を計算してみます。伝播関数の極の位置が粒子を表しているので、本当に粒子数が増えているのかを確認するために、伝播関数を計算します。計算結果はここに書いてあります。

この伝播関数の極の位置を見てます。つまり分母が 0 になる位置ですが、まず $p_\mu = 0$ の位置でこの分母は 0 になります。この部分は、連続の理論でも $p_\mu = 0$ で伝播関数が極になることから、特に問題ではない期待通りの結果だといえます。しかしこの格子の伝播関数の分母は、$\sin ap_\mu$ という形をしています。そのため、$p_\mu = 0$ の位置だけでなく、$p_\mu = \pm\pi/a$ の位置でもこの分母は 0 になってしまいます。これが連続理論には存在しなかったダブラーと呼ばれる粒子です。

このようにダブラーと呼ばれる粒子が発生してしまうというのがダブラー問題であり、後に Nielsen と Ninomiya らによって、この問題はいくつかの条件のもとでは避けられないということが証明されました。

Wilson fermion

$$S_f = a^4 \sum_x \bar{\psi} D_w \psi$$

$$D_w = i\gamma^\mu \frac{1}{2}(\triangle_\mu + \triangle_\mu^*) - \frac{a}{2}\triangle_\mu^* \triangle_\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \psi(x)\bar{\psi}(y) \rangle = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \times \frac{i\gamma^\mu \{(1/a)\sin ap_\mu\} - (2/a)\sin^2 ap_\mu/2}{\{(1/a)\sin ap_\mu\}^2 + \{(2/a)\sin^2 ap_\mu/2\}^2}$$

Wilson の対処法

$-\frac{a}{2}\triangle_\mu^*\triangle_\mu$ という項を導入してダブラーに質量を与える

→ カイラル対称性は壊れる

それではこのようなダブラー問題に対してどのような試みがなされているかを見てます。まずはじめに Wilson fermion と呼ばれる方法を紹介します。この方法は、格子理論をはじめに提案した Wilson が考案した対処法です。

このやり方では、格子の Dirac 演算子に Wilson term と呼ばれる補正項を付け加えます。この補正項があると、伝播関数の計算結果にこのような $\sin ap_\mu/2$ という補正がくっつきます。

この補正項は形が、2 分のap_μ であることに注意してください。この項は期待通りの粒子を与える $p_\mu = 0$ の位置では 0 になり特に補正は与えませんが、ダブラーである $p_\mu = \pi/a$ の位置では 0 でない値を持ちます。つまりダブラーだけに質量のような ‘重み’ を与えることで、ダブラーが理論に現われないようにしているのです。

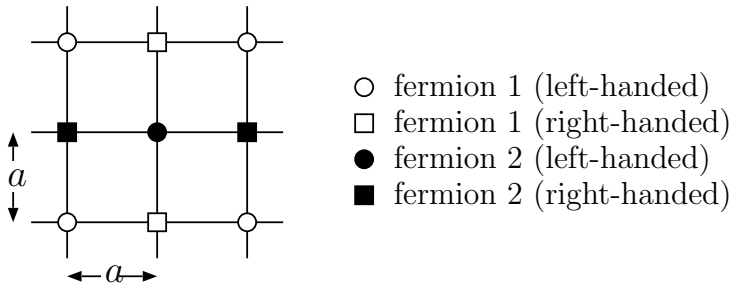
この補正項を付けるとダブラーは存在しなくなるのですが、補正項の形が質量項と同じ形をしているので、カイラル対称性が全くなくなってしまうという弱点もあります。

Staggerd fermion

格子の各サイトに、スピノールの 1 成分のみを分配する。

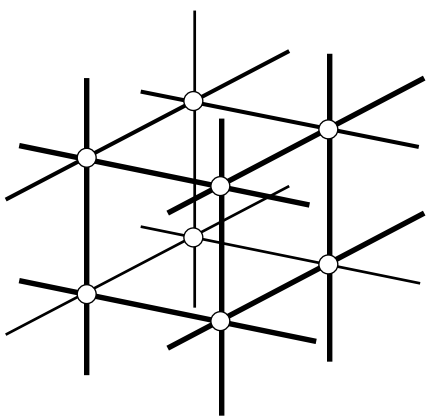
↓

- 有効格子サイズが 2 倍になってダブラー発生しない
- $2^{d/2}$ 個のフェルミオンの種類が必要 (4 次元なら 4 個のフレイバー)



では次に staggerd fermion と呼ばれる方法を紹介します。

通常のやり方でフェルミオンを格子に乗せようとすると格子の各サイトにスピノール場全体を乗せてしまうのですが、この staggerd fermion という方法では、格子の各サイトにはスピノールの 1 成分のみを乗せるようにします。



この図の白丸のところに、スピノールの第一成分、第二成分、第三成分、... というように配置していくのです。

そうするとどんなことが起きるのかというと、ひとつのスピーノル成分にとっての有効格子サイズが 2 倍になって a から $2a$ になります。これはつまり、先程単純に格子化した場合として計算した伝播関数でいうと、

$$\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma^\mu\{(1/a)\sin ap_\mu\}}{\{(1/a)\sin ap_\mu\}^2} e^{ip(x-y)}$$

この積分範囲が $-\pi/2a$ から $\pi/2a$ になるようなものです。もともと伝播関数は $p_\mu = \pi/a$ で分母が 0 になってしまうのですが、その極の位置を積分範囲から出してしまうという効果があります。

つまり、staggerd fermion のやり方で何を目的にしているかというと、この「有効格子サイズを 2 倍にする」ということです。「有効格子サイズを 2 倍にする」という目的を達成するための手段として、「格子の各サイトにスピノールの 1 成分のみを分配しようとする」のです。

そして、このスピノールの成分の分配を完全に行おうとすると、今度は新しくフェルミオンにフレイバーの自由度を導入する必要が出てきます。2 次元の場合を図示していますが、2 次元ではスピノールは左巻きと右巻きの 2 成分だけです。例えばはじめに横方向にフェルミオンの左巻き成分、右巻き成分、左巻き成分... というように分配したとします。そうすると、横方向には有効格子サイズが 2 倍になっているのですが、縦方向では有効格子サイズが 2 倍になりません。縦方向でも有効格子サイズを 2 倍にするためには、新しく別の種類のフェルミオンを用意して、右巻き、左巻き、... というように配置しなくてはなりません。

2 次元でない任意の d 次元に対しても、同様に格子のサイト数とスピノールの成分数を比較することで、$2^{d/2}$ 個のフェルミオンが必要になることがわかります。4 次元ならば、4 個のフェルミオンが必要になります。

Lüscher fermion

$$S = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x) D \psi(x)$$

カイラル対称性：

$$\gamma_5 D + D\gamma_5 = 0$$

$$\Downarrow$$

Lüscher **対称性**：

$$\gamma_5 D + D\gamma_5 = a D \gamma_5 D$$

(Ginsparg-Wilson **関係式**)

解：

$$D = \frac{1}{a}\Big\{1 - A(A^\dagger A)^{-1/2}\Big\}$$

$$A = 1 - a\Big[i\gamma^\mu \frac{1}{2}(\triangle_\mu + \triangle_\mu^*) - \frac{a}{2}\triangle_\mu^* \triangle_\mu\Big]$$

それではダブラー問題に対する試みの 3 番目として、Lüscher fermion というものを紹介します。これはこれまで紹介した 2 つのやり方と比べると、新しいやり方であると言えます。

このやり方では、作用に現われる Dirac 演算子 D に注目します。通常のカイラル対称性は、このように Dirac 演算子と γ_5 の反交換関係が 0 になるという式で記述することができます。格子理論ではこの関係式が成立しないということなので、Lüscher fermion の考え方では、反交換関係の結果に格子サイズ a に比例する補正項を付け加えます。そうして得られた式が Lüscher 対称性もしくは Ginsparg-Wilson 関係式と呼ばれる関係です。

そして格子上では、この関係式が成立していると期待するわけです。このような関係式を満たす Dirac 演算子はすでに発見されていました。

このような関係式が成り立っているとどんないいことがあるのかと言うと、それはまだ未知数であると表現するのが一番正確なのでしょうが、ひとつには...

Lüscher fermion：アノマリーの計算

$$\langle \mathcal{O} \rangle_F = \int \prod_x d\psi(x) d\bar{\psi}(x) \mathcal{O} e^{-S_F}$$

($\mathcal{O}$ はフェルミオン場の任意の積)

$$\begin{cases} \psi \to \psi + \epsilon \delta\psi \,, \\ \bar{\psi} \to \bar{\psi} + \epsilon \delta\bar{\psi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta\psi = \gamma_5 (1 - \dfrac{1}{2} aD) \psi \\ \delta\bar{\psi} = \bar{\psi} (1 - \dfrac{1}{2} aD) \gamma_5 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \delta\mathcal{O} \rangle_F = -a \,\mathrm{tr}\, (\gamma_5 D) \langle \mathcal{O} \rangle_F$$

$$\left(-a \,\mathrm{tr}\, (D\gamma_5) = 2N_f \times \mathrm{index}(D) \right.$$
$$\left. (N_f : \text{フレイバー数}) \right)$$

$$\boxed{\langle \delta\mathcal{O} \rangle_F = 2N_f \times \mathrm{index}(D)}$$

(ひとつには...) アノマリーの計算がきちんとできるということが挙げられるかと思います。これは格子サイズを有限にしたままの連続極限をとる前の段階で、ちゃんとアノマリーの計算ができるということで、さらに結果は期待通り、カイラルアノマリーと同じ形になります。

格子サイズが有限のままでカイラルアノマリーが出てくるということから、このLüscher対称性は、格子上でのカイラル対称性に相当するものだと考えられています。

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}_\mu = \frac{1}{a}\sin ap_\mu \\ P_\mu = \frac{2}{a}\sin\frac{ap_\mu}{2} \end{array} \right\} \text{という表記法で}$$

Lüscher fermion

$$a\tilde{D}(p) = 1 - \left\{1 - \frac{1}{2}a^2P_\mu^2 - ia\gamma_\mu\tilde{p}_\mu\right\} \times\left\{1 + a^2P_\mu^2 - \tilde{p}_\mu\tilde{p}_\nu + \frac{a^4}{4}P_\mu^2P_\nu^2\right\}^{-1/2}$$

Wilson fermion

$$\tilde{D}(p) = i\gamma_\mu\tilde{p}_\mu + \frac{1}{2}aP_\mu^2$$

Staggerd fermion

$$\tilde{D}(p) = i(\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})\tilde{p}_\mu + \frac{1}{2}a(\gamma_5 \otimes \gamma^\mu\gamma_5)P_\mu^2$$

Lüscher fermion でダブラーがどうなっているかを見てみます[20]。

伝播関数は Dirac 演算子をフーリエ変換したものの逆数で与えられるので、ここでは Dirac 演算子をフーリエ変換したものを書いています。またここでは小文字の $\tilde{p}_\mu$ で $\frac{1}{a}\sin ap_\mu$ を表し、大文字の P_μ で Wilson fermion でいうところの補正項： $\frac{2}{a}\sin\frac{ap_\mu}{2}$ を表しています。

この Lüscher fermion の Dirac 演算子をフーリエ変換したものは、先程お見せした Dirac 演算子の形を使っていますが、とても複雑な形をしています。しかし、$p_\mu = 0$ では $\tilde{p}_\mu$ も大文字の P_μ もどちらも 0 になるのに対して、$p_\mu = \pi/a$ では $\tilde{p}_\mu$ が 0 になっても、大文字の P_μ が 0 にならずに補正を付け加えます。つまり、Lüscher fermion の考え方でも、Wilson fermion と同じようにダブラーだけに質量を与えるような補正項を付け加えているのだと考えることができます。ただその補正項の付け加え方が Lüscher 対称性と呼ばれる関係式を満たすようになっているということが、Wilson fermion との違いです。

[20] このページは発表会本番では時間の都合で省略しました。

格子を用いた超対称性を含む理論

本論文中で紹介しているもの

- Staggerd fermion を基にした試み
- Ginsparg-Wilson 関係式の超対称性版

なぜ超対称性か?

超対称性：フェルミオンと
ボゾンの間の対称性

⇓

結合定数が統一できる
素粒子理論としてありえる対称性の最後？
(Coleman-Mandula/Haag-Lopuszanski-Sohnius の定理)

それでは格子の考え方を用いた超対称性を含む理論の話に移りたいと思います。超対称性のある格子理論はいまもいろいろな試みが成されている話題で、この論文ではそのうち 2 つだけを紹介しています。staggerd fermion をもとにした試みと、Ginsparg-Wilson 関係式の超対称性版を構成しようという試みの 2 つです。

なぜ超対称性のある理論を考えたいのかというと、いくつか理由はあるのですが、一番には「結合定数が統一できる」ということが挙げられるかと思います。超対称性があると、電磁相互作用と弱い相互作用と強い相互作用の結合定数が高エネルギーで一致すると考えられています。

また、相対論的な場の理論で許される対称性はゲージ対称性などを除くと、あとは超対称性だけであるという定理も存在します。そこで、素粒子理論として考えられる対称性の最後のものであるという視点で興味を持つ人もいるかと思います。

超対称性を持つ格子理論

~ 格子を用いた超対称 Yang-Mills 理論への挑戦

$$S_g = -\beta \sum_{n,\mu\nu} \mathrm{tr}\left(U_{n(\mu\nu),\mu\nu} + U_{n(\mu\nu),\nu\mu}\right)$$

$$S_f = \sum_{n,\rho} b_\rho(n(\rho))\,\mathrm{tr}\Big\{\psi_{n(\rho)} U_{n(\rho),\rho}\psi_{n(\rho)+\hat{\rho}} U^\dagger_{n(\rho),\rho} - \psi_{n(\rho)+\hat{\rho}} U^\dagger_{n(\rho),\rho}\psi_{n(\rho)} U_{n(\rho),\rho}\Big\}$$

$$\delta U_{n(\mu),\mu} = \sum_\rho \Big\{\alpha^{\rho(n)}_{n(\mu),\mu}\xi^{\rho(n)}_{n(\mu)} U_{n(\mu),\mu} + U_{n(\mu),\mu}\alpha^{\rho(n)}_{n(\mu)+\hat{\mu},\mu}\xi^{\rho(n)}_{n(\mu)+\hat{\mu}}\Big\}$$

$$\delta\psi_n = \sum_{0<\mu<\nu} C^{(\mu\nu)(n)}_n \left[U_{n,(\mu\nu)(n)} - U_{n,(\nu\mu)(n)}\right]$$

$n(\mu\nu)$: plaquette $(n,\mu\nu)$ の基点

$n(\rho)$: ρ 座標に関して $n_\rho = 0$ の点

$\rho(n)$: $n+\hat{\rho}$ か $n-\hat{\rho}$ (cell 内)

α, $C^{\mu\nu}_n$ はグラスマンの変数

$(\mu\nu)(n) = (-)^{n_\mu}\hat{\mu}(-)^{n_\nu}\hat{\nu}$, $\xi^\mu_n = U_{n,\mu}\psi_{n+\hat{\mu}}U^\dagger_{n,\mu}$

具体的な話に移ります。超対称性を格子で表そうとする試みとして staggerd fermion をもとにしたやり方を紹介します。このやり方では。はじめにこのようにゲージ場とフェルミ場の作用と、それらの変換性を導入してしまいます。ここでは b, α, C が導入されたパラメーターになっています。

通常、超対称変換を考えると、変換パラメーターは 1 つだけです。

この理論では、はじめに多くのパラメーターを導入してしまって、あとから「理論が超対称変換のもとで不変になるように」という要請を課して、多めに導入したパラメーターの間に成り立つ関係式を見付けようというのが筋書きです。

どのような要請をするのかというと...

超対称性を持つ格子理論

~ 格子を用いた超対称 Yang-Mills 理論への挑戦

要請:

1. 作用が超対称変換の下で不変であること
2. 超対称変換の下で積分の測度 (measure) が不変であること

$$\Downarrow$$

導入した変数への条件:

1. $\rightarrow$

$$\alpha^{\mu}_{n,\nu} = -\frac{b_\mu(n)}{b_\nu(n)}\alpha^{\nu}_{n,\mu}$$

$$b_\rho(n)C^{(\mu\nu)(n)}_{n} = \beta\left[(-)^{n_\mu}\alpha^{\rho}_{n,\mu} - (-)^{n_\nu}\alpha^{\rho}_{n,\nu}\right]$$

$$b_\rho(n)C^{(\nu-\rho)}_{n+\hat{\rho}} + b_\nu(n)C^{(-\nu\rho)}_{n+\hat{\nu}} = -\beta\left(\alpha^{-\rho}_{n+\hat{\rho},\nu} - \alpha^{-\nu}_{n+\hat{\nu},\rho}\right)$$

2. $\alpha^{\mu}_{n,\mu} = 0$ なら OK.

   $\leftarrow$ 1. の条件で自動的に成立。

(どのような要請をするのかというと...) この 2 つです。1 つ目は作用が超対称変換の下で不変であるということ。2 つ目は積分の測度が超対称変換の下で不変であるということ。

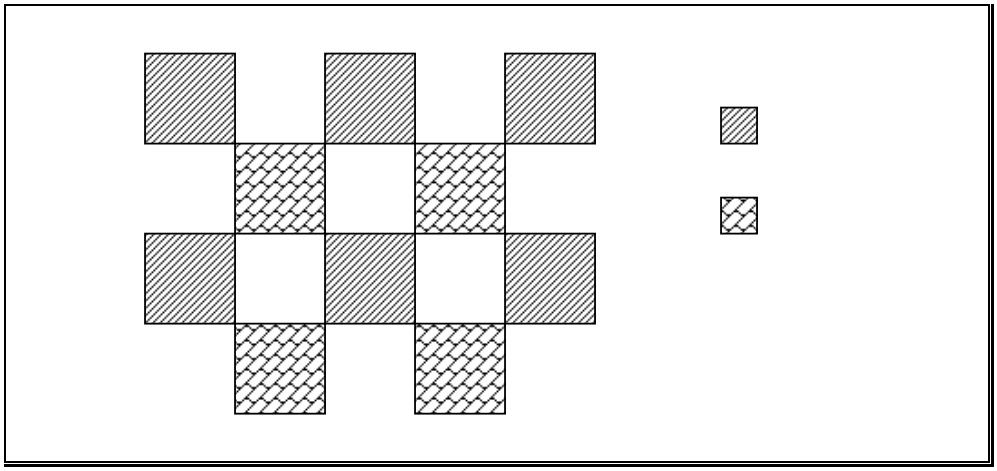
通常、理論が超対称変換の下で不変だというのはこれらを合わせたもの、つまり作用の変化と積分測度の変化を合わせたものが、超対称変換の下で不変になればいいのですが、それよりもやや強い条件を課しています。作用と積分測度の変化を足したものが 0 になるのではなく、作用と積分測度の変化のそれぞれが 0 になるように要請するのです。

このようにすると、1 番目の要請からこのような条件式が出てきて、理論がさっぱりと書けるという利点があります。また、2 番目の積分測度が超対称変換の下で不変になるという要請は、1 番目の要請から出てくる条件式が成立しているときに必ず成立しているということもわかります。つまり、通常の理論が超対称不変であるという条件よりは少し強い条件を課しているのですが、それは 2 つではなく実質的には「作用が超対称変換の下で不変になれ」という条件だけということになります。

先程の作用と変換性を考えて、さらに導入したパラメーターの間に、ここに書いた条件式が成立しているとき、考えている理論は超対称変換の下で不変になっています。

これで、超対称変換のもとで不変である格子理論を構成したことになります。

ただ先程ははっきり述べなかったのですが、この理論の作用は 1 辺が a の単位格子に対して記述していました。つまり格子サイトは 0 か 1 の値しか持ちません。そこでこれを全空間に拡張しなくてはいけないのですが、この理論を提案している人たちは、



のように、イチマツ模様に cell を並べていけばいいだろうと主張しています。

このように超対称性のある格子理論はいろいろと考えられているのですが、実際のところ、まだ万人が納得する形で定式化されてはいません。また、本当に格子上で超対称性が実現できているのかどうかもまだはっきりとはしていません。そういうことから、これらはまだまだ考える余地がある分野だといえます。

以上で発表を終えたいと思います。

A.2 質疑応答

Q1.

Coleman の定理を挙げていましたが、それはあくまで連続理論でのお話で格子理論で成立するとは限りません。その理論 (staggerd fermion をもとにした超対称な格子理論) での要請が 2 つあって「やや強い要請」と言っていましたが、そもそもその要請はかなりキツい要請なのではないでしょうか? つまり、格子で理論を考えたときに超対称性が本当に実現されているのでしょうか?

A1.

はい。確かに格子上で超対称性が本当に実現されているかどうかは、まだはっきりとした答えはありません。ここで紹介したものは「格子上でも超対称性があるだろう」と期待する立場の理論です。もちろんカイラル対称性と同じように、格子上では超対称性は存在しないのだと考える立場もあり、その際にはカイラル対称性でいう Lüscher 対称性のように少しでも都合のよい対称性の壊し方を考えるべきで、そういった視点での研究もあります。時間の都合で省略しましたが、Ginsparg-Wilson 関係式を超対称変換に拡張しようとする試みはその例になっているかと思います。

Q2.

ここの理論でうまく超対称不変な理論が構成できているのは staggerd fermion の考え方を使っているからでしょうか?

A2.

…… 。Staggerd fermion の考え方だからというのもあるのでしょうが、それよりも一辺の長さが 0 か 1 である単位格子に限って話をしていることの方が重要なのではないかと思います。

(質問者)
それは違うでしょう。例えば Wilson fermion を利用した理論で単位格子だけに話を限っても、超対称性は実現できませんよ。

はあ... その点はやったことがないので何とも言えません[21]。

以降、質問なし。

A.3 使わなかったシート

用意したけど使わなかった OHP は何枚かありますが、そのうち 3 枚だけ説明付きで載せておきます。

[21] 我ながら情けない返答ですが... ひとまず Wilson fermion で単位格子に話を限っても超対称性が実現できないのは事実でしょう。しかし staggerd fermion の考え方を使えば、必ず超対称性が実現できるとも限らないはずです。
ここで紹介したやり方が、他のやり方となにが違っているのかについては他のやり方を調べていなかったので答えられませんでした。

超対称性を持つ格子理論

~ 超対称に拡張した Ginsparg-Wilson 関係式

Chiral-multiplet : $\Phi = (\phi, \psi, F)^T$ の変換を

$$\delta_\epsilon \Phi = Q_L \Phi$$
$$\delta_\epsilon \bar{\Phi} = \bar{\Phi} \bar{Q}_L$$

作用を

$$A(\Psi, \bar{\Psi}) = \sum_{n,m} \bar{\Psi}_n S_{(n,m)} \Psi_m$$

として、

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \bar{\Psi}(\bar{Q}_L S + S Q_L)\Psi \\ \qquad\qquad = -\bar{\Psi} S \alpha^{-1}(\alpha Q_L + \bar{Q}_L \alpha)\alpha^{-1} S \Psi \\ \\ \delta J = \ \mathrm{str}\, \alpha^{-1}(\alpha Q_L + \bar{Q}_L \alpha)\alpha^{-1} S \\ \qquad\qquad\qquad - \ \mathrm{str}\, \alpha^{-1}(\alpha Q_L + \bar{Q}_L \alpha) \end{cases}$$

(万が一時間が余った場合として用意していたが、時間が余ることはなかったので使用せず。この内容を詳しく書いた 2 枚の補足もあり)

実数値関数の Chiral-multiplet を考えます。その超対称変換を格子化したものが Q_L を使ってこのように書けるとします。また作用は運動項を S と表記して、このように書けているとします。

するとカイラル対称性に対して Ginsparg-Wilson 関係式を出したのと同じやり方で計算していくと、次に書いた 2 つの関係式が得られます。このはじめに書いた方がカイラル対称性でいうところの Ginsparg-Wilson 関係式に相当するものであり、2 つ目の式は、この変換の下での積分測度の変化に対する式です。δJ は積分測度の変化によって出てくるヤコビアンファクターで、str というのはフェルミオンの成分には -1 を掛け、スカラー成分には $+1$ を掛けた上で対角成分の和をとる super-trace を表しています。

ダブラーの何が問題か？

~ ダブラーの特徴 ~

- 元の粒子と逆のヘリシティーを持つ
- ヘリシティー以外の量子数は同じ

~ 標準模型 $(\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1))$ ~

$\left.\begin{matrix} e_L \\ e_R \\ \nu_{eL} \end{matrix}\right\}$ を、 $\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}_L, e_R$ という組で扱う

$\Downarrow$

これを格子化すると...

$\begin{pmatrix} e' \\ \nu'_e \end{pmatrix}_R, e'_L$ が現われる

(ダブラーがあるのは問題なのか? ダブラーがあってもいいのではないか? という質問があった場合に使うつもりで用意したトランスペアレンシー)

ダブラーの特徴というのは、ここに書いてあるように「元の粒子と逆のヘリシティーを持つこと」と、「ヘリシティー以外の量子数は元の粒子と同じであること」の 2 つです。

素粒子理論での標準模型では左巻きの電子とニュートリノの組 $\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}_L$ で $\mathrm{SU}(2)$ doublet を組み、右巻きの電子 e_R で $\mathrm{SU}(2)$ singlet とします。ところが、これを格子化して、さらに連続極限をとったとすると、離散化して連続極限をとっただけなので元の通りの理論になっていて欲しいところが、元の理論には存在しなかった doublet $\begin{pmatrix} e' \\ \nu'_e \end{pmatrix}_R$ と singlet e'_L が理論に現われてしまいます。これが「標準模型を格子で表すことはできない」ということであり、ダブラー問題を回避しなくてはならない理由です。

格子上で定義された関数として $F(x)$ と表記する。そのフーリエ変換を $\tilde{F}(p)$ として、

$$\tilde{F}(p) = \sum_x F(x) e^{ipx}$$

格子の並進不変性に注意すると、

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(p + \hat{\mu}\pi/a) &= \sum_x F(x) e^{i(p+\frac{\pi}{a}\hat{\mu})x} \\
&= \sum_{\vec{n}} F(x) e^{i(p+\frac{\pi}{a}\hat{\mu})\vec{n}a} \\
&= \sum_{\vec{n}} F(x) e^{i(p\vec{n}a + n_\mu \pi)} \\
&= \sum_{\vec{n}} F(x) e^{i(p\vec{n}a - n_\mu \pi)} \\
&= \sum_x F(x) e^{i(p-\frac{\pi}{a}\hat{\mu})x} \\
&= \tilde{F}(p - \hat{\mu}\pi/a)
\end{aligned}$$

となり、周期 $2\pi/a$ を持っている。そこで運動量空間の範囲として、

$$-\frac{\pi}{a} \leq p_\mu \leq \frac{\pi}{a}$$

を選ぶ。

(格子理論で運動量空間の積分範囲がなぜ $-\pi/a \sim \pi/a$ なのかを聞かれた場合用のトランスペアレンシー)

格子上で定義された関数を $F(x)$ と表記します。これをフーリエ変換したものを考えると、格子に並進対称性があることから運動量空間で $2\pi/a$ という周期を持つことがわかります。そこで、運動量の範囲として $-\frac{\pi}{a} \leq p_\mu \leq \frac{\pi}{a}$ というものを選んでいます。$-\frac{\pi}{4a} \leq p_\mu \leq \frac{3\pi}{4a}$ という選び方をする人もいますし、選び方には任意性がありますが以下の議論では運動量の範囲の選び方は特に関係ありません。

謝辞

はじめに昨年亡くなられた恩師・岩谷啓子先生に心から感謝を述べたいと思います。小学生のころの先生の御指導がなければ、いま書いている私の文章は存在しません。先生の御指導はいまの私の中に生き続けています。また中学時代お世話になった西須先生、大学浪人中の宇津木先生から教えを受けたおかげで、まがりなりにも英語で文章を書くことができるようになりました。この論文の概要を英語で書けたのは先生方のおかげです (変な言い回しは私の責任です)。どうもありがとうございました。謹んで御冥福をお祈りいたします。

この論文を書き上げるまでに私は多くの人のお世話になっております。本来なら今までに出会った先生方、友人、諸先輩、諸後輩、家族すべてにお礼を述べなければならないところですが、そうするには余白が少なすぎますので名前を挙げないことをお許しください。

修士論文に関しては綿引芳之さんに特に御指導いただきました。要所要所での議論・忠告がなければ、いまの形に修士論文をまとめることはできなかったと思います。また推敲前の論文を読んでいただき、本当にありがとうございました。また坂井典佑先生には論文執筆中いろいろと気を使っていただいたり、折に触れて励ましの言葉をいただき、それらのおかげで論文を書き上げることができました。また草稿に目を通していただきまして、ありがとうございました。2002 年の北海道大学の冬の学校で議論してくれた皆様、ありがとうございました。またその機会を作っていただいた関係者の方々には深く感謝しております。伊藤克司先生からはその冬の学校に参加する機会をいただき、ありがとうございました。

2002 年 1 月 31 日　　山本明

修士論文には提出後にも手を加えて満足のいく形にするんだと宣言していた割に、作業を一向に進めず、完成日は延ばされ続けてきました。いまだに満足いく形にはなっていないのですが、いいかげん他の研究に集中したいと思い、やっつけ仕事ですが完成扱いとします。

提出時と比較して違っているのは、細かな式の間違いを修正した点と、導入部分くらいです。修士論文発表会の発表内容を補足として付け加えましたが、これはおまけです。他の節も読み返すごとに書き直したい部分は見つかるのですが、ここで一区切りとさせていただきます。

導入部分だけはどうにもいただけないと思ったので、全文差し替えました。前より良くなっている保証はありませんが。

2002 年 12 月 6 日　　山本明

参考文献

[1] Wilson, K. G.; *Phys. Rev.* **D10**, 2445–2459 (1974).

[2] Wilson, K. G. *Gauge Theories and Modern Field Theory.* MIT Press, Cambridge (1975).

[3] Wilson, K. G. *New Phenomena in Subnuclear Physics.* Plenum Press, New York (1977).

[4] Creutz, M.; *Phys. Rev.* **D21**, 2308–2315 (1980).

[5] Hamber, H. and Parisi, G.; *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1792 (1981).

[6] Kogut, J. B. and Susskind, L.; *Phys. Rev.* **D11**, 395 (1975).

[7] Susskind, L.; *Phys. Rev.* **D16**, 3031–3039 (1977).

[8] Kawamoto, N. and Smit, J.; *Nucl. Phys.* **B192**, 100 (1981).

[9] Kluberg-Stern, H., Morel, A., Napoly, O., and Petersson, B.; *Nucl. Phys.* **B220**, 447 (1983).

[10] Becher, P. and Joos, H.; *Zeit. Phys.* **C15**, 343 (1982).

[11] Kawamoto, N. and Tsukioka, T.; *Phys. Rev.* **D61**, 105009 (2000). hep-th/9905222.

[12] Nielsen, H. B. and Ninomiya, M.; *Nucl. Phys.* **B185**, 20 (1981). Erratum:Nucl.Phys. B195 (1982) 541.

[13] Nielsen, H. B. and Ninomiya, M.; *Nucl. Phys.* **B193**, 173 (1981).

[14] Nielsen, H. B. and Ninomiya, M.; *Phys. Lett.* **B105**, 219 (1981).

[15] Drell, S. D., Weinstein, M., and Yankielowicz, S.; *Phys. Rev.* **D14**, 1627 (1976).

[16] Ginsparg, P. H. and Wilson, K. G.; *Phys.Rev.* **D25**(10), 2649 (1982).

[17] Neuberger, H.; *Phys. Lett.* **B417**, 141–144 (1998). hep-lat/9707022.

[18] Neuberger, H.; *Phys. Lett.* **B427**, 353–355 (1998). hep-lat/9801031.

[19] Kaplan, D. B.; *Phys. Lett.* **B288**, 342–347 (1992). hep-lat/9206013.

[20] Lüscher, M.; *Phy.Lett.* **B428**, 324–345 (1998). hep-lat/9802011.

[21] Luscher, M.; *Nucl. Phys.* **B538**, 515–529 (1999). hep-lat/9808021.

[22] Luscher, M.; *Nucl. Phys.* **B549**, 295–334 (1999). hep-lat/9811032.

[23] Suzuki, H.; *Nucl. Phys.* **B585**, 471–513 (2000). hep-lat/0002009.

[24] Kikukawa, Y. and Nakayama, Y.; *Nucl. Phys.* **B597**, 519–536 (2001). hep-lat/0005015.

[25] Kikukawa, Y., Nakayama, Y., and Suzuki, H.; *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **106**, 763–765 (2002). hep-lat/0111036.

[26] Dondi, P. H. and Nicolai, H.; *Nuovo Cim.* **A41**, 1 (1977).

[27] Curci, G. and Veneziano, G.; *Nucl. Phys.* **B292**, 555 (1987).

[28] Aratyn, H., Goto, M., and Zimerman, A. H.; *Nuovo Cim.* **A84**, 255 (1984).

[29] Aratyn, H., Goto, M., and Zimerman, A. H.; *Nuovo Cim.* **A88**, 225 (1985).

[30] Aratyn, H., Bessa, P. F., and Zimerman, A. H.; *Z. Phys.* **C27**, 535 (1985).

[31] Aratyn, H. and Zimerman, A. H.; *J. Phys.* **A18**, L487 (1985).

[32] Montvay, I.; *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **63**, 108–113 (1998). hep-lat/9709080.

[33] Aoyama, T. and Kikukawa, Y.; *Phys. Rev.* **D59**, 054507 (1999). hep-lat/9803016.

[34] Kaplan, D. B. and Schmaltz, M.; *Chin. J. Phys.* **38**, 543–550 (2000). hep-lat/0002030.

[35] Fleming, G. T., Kogut, J. B., and Vranas, P. M.; *Phys. Rev.* **D64**, 034510 (2001). hep-lat/0008009.

[36] So, H. and Ukita, N.; *Phys. Lett.* **B457**, 314–318 (1999). hep-lat/9812002.

[37] So, H. and Ukita, N.; *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **94**, 795–798 (2001). hep-lat/0011050.

[38] Itoh, K., Kato, M., Sawanaka, H., So, H., and Ukita, N.; *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **106**, 947–949 (2002). hep-lat/0110082.

[39] Itoh, K., Kato, M., Sawanaka, H., So, H., and Ukita, N.; *Prog. Theor. Phys.* **108**, 363–374 (2002). hep-lat/0112052.

[40] Itoh, K., Kato, M., Sawanaka, H., So, H., and Ukita, N.; Fermionic symmetry in ichimatsu-decomposed lattice models, hep-lat/0209034.

[41] Itoh, K., Kato, M., Murata, M., Sawanaka, H., and So, H.; Vacuum structure of the ichimatsu-decomposed lattice models, hep-lat/0209030.

[42] Kaplan, D. B., Katz, E., and Unsal, M.; Supersymmetry on a spatial lattice, hep-lat/0206019.

[43] Kaplan, D. B.; Lattice supersymmetry, hep-lat/0208046.

[44] Rothe, H. J. *LATTICE GAUGE THEORIES An Introduction (2nd edition)*. World Scientific (1997).

[45] Kogut, J. B.; *Rev. Mod. Phys.* **51**, 659 (1979).

[46] Fujikawa, K.; *Nucl. Phys.* **B589**, 487–503 (2000). hep-lat/0004012.

[47] Fujikawa, K. and Ishibashi, M.; *Nucl. Phys.* **B605**, 365–394 (2001). hep-lat/0102012.